



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Automatique

Présentée et soutenue par :

Mathieu CLAEYS

le : 8 octobre 2013

Titre :

Mesures d'occupation et relaxations semi-définies
pour la commande optimale

JURY

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY (PU Université Paul Sabatier, IMT)

Émanuel TRÉLAT (PU Université Pierre et Marie Curie, LJLL)

Ecole doctorale :

Systèmes (EDSYS)

Unité de recherche :

LAAS-CNRS

Directeur(s) de Thèse :

Didier HENRION (DR CNRS, LAAS)

Jean-Bernard LASSERRE (DR CNRS, LAAS)

Rapporteurs :

Marc QUINCAMPOIX (PU Université de Brest, LMBA)

Hasnaa ZIDANI (MDC ENSTA-ParisTech, UMA)

À mes parents, in memoriam.

Abstract

This thesis details a global method for optimal control of open-loop systems. This is done by relaxing the control problem as a generalized moment problem, which can be solved numerically by a hierarchy of semi-definite relaxations. The approach is first applied to the impulsive control of linear time varying systems, by modeling the controls by a measure. The resulting semi-definite conditions circumvent time discretization and related difficulties. By the use of occupation measures, the method is then extended to a class of impulsive non-linear problems. This results in a monotone sequence of lower bounds to the original control problem. Finally, those results are transposed to switched system, by modeling each mode by a corresponding occupation measure. This allows for large computational gains with respect to the classical approach, where the control space is measured.

English title: Occupation measures and semi-definite relaxations for optimal control

Keywords: optimal control, moment optimization, semi-definite programming, impulsive control, occupation measures, switched systems, polynomial systems, Lasserre relaxations.

Résumé

Cette thèse s'intéresse au calcul de solutions globales de problèmes de commande optimale en boucle ouverte. La méthodologie générale se base sur l'approche par les moments, où un problème d'optimisation est relâché en un problème généralisé des moments, dont une hiérarchie de relaxations semi-définies peut être résolue numériquement. L'approche est tout d'abord appliquée aux problèmes impulsionnels linéaires à temps variant, en modélisant le contrôle par une mesure. Les conditions semi-définies qui en résultent permettent de s'affranchir complètement des difficultés liées à la discrétisation temporelle. Ensuite, en se basant sur le formalisme des mesures d'occupations, la méthode peut être étendue aux systèmes impulsionnels non-linéaires, et fournit une suite monotone de bornes inférieures au coût optimal. Enfin, les résultats précédents peuvent être transposés aux systèmes à commutation, en modélisant chaque mode par une mesure d'occupation associée. Ceci permet d'obtenir des gains substantiels en charge de calcul par rapport à l'approche classique où l'espace de contrôle est mesuré.

Mots-clés : Commande optimale, approche par les moments, programmation semi-définie, commande impulsionnelle, mesures d'occupation, systèmes à commutation, systèmes polynomiaux, relaxations de Lasserre.

Remerciements

Je tiens bien évidemment à remercier mes directeurs, qui m’ont fait confiance pour débiter une thèse malgré mes quelques années en industrie. Didier Henrion, tout d’abord, qui a fait preuve de grande patience et de disponibilité. Je garde précieusement ses conseils, et j’espère pour la suite de ma carrière pouvoir comme lui relever constamment de nouveaux défis techniques, tout en gardant à l’esprit l’implémentation pratique des choses. Je remercie tout aussi chaleureusement Jean-Bernard Lasserre, qui a toujours été là pour répondre à mes nombreuses questions, corriger mes erreurs, me faire découvrir la théorie des moments dont je ne connaissais rien, et –suprême honneur– m’aura même transporté sur l’une de ses motos.

Je remercie également les membres de mon jury, et tout d’abord Marc Quincampoix et Hasnaa Zidani qui m’ont fait l’honneur d’être mes rapporteurs. Merci beaucoup pour leurs remarques qui m’ont permis d’augmenter la qualité de cette thèse. Je remercie également Emmanuel Trélat et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty d’avoir accepté de faire party de mon jury.

Je tiens aussi à remercier tout ceux qui m’ont permis d’enrichir mon horizon scientifique au travers de collaborations fructueuses, et plus particulièrement Bernard Bonnard, Olivier Cots, et Pierre Martinon pour le problème du contraste, Frédéric Messine et Sebastian Sager pour le problème de la voiture électrique, Martin Kružík et Martin Mevissen pour m’avoir accueilli en séjour lors de la fin de ma thèse, et Milan Korda pour de nombreuses discussions.

Merci à tous les membres de l’équipe MAC du LAAS, qui m’ont chaleureusement accueilli au sein du groupe et des pauses-café : Lucie Baudouin, Germain Garcia, Frédéric Gouaisbaut, Mioara Joldes, Christophe Louembet, Vincent Mahout, Dimitri Peaucelle, Isabelle Queinnec, Alexandre Seuret, Sophie Tarbouriech, Alain Théron et Luca Zaccarian. Je tiens à remercier particulièrement Denis Arzelier, pour m’avoir fait découvrir les problèmes de rendez-vous orbitaux, qui ont fourni une motivation pratique tout au long de ma thèse. Merci aussi à Christèle Mouclier pour son support indispensable.

Merci aussi à l’équipe du GEI de l’INSA Toulouse pour m’avoir accueilli en tant que doctorant chargé d’enseignement. Merci beaucoup à Audine Subias pour m’avoir fait confiance pour le cours de Systèmes, ainsi que Gwendoline Le Corre, Elodie Chanthery, Slim Abdellatif, Vikas Shukla et Gougam Houssam-Eddine avec qui j’ai partagé de nombreuses heures de travaux pratiques.

Je ne peux évidemment pas oublier les doctorants et post-docs du groupe, et en particulier mes compagnons d’(in)fortune sur les moments : Florian et Thung. Merci aussi à mes collègues de bureaux qui auront dû me supporter devant eux tous les jours de la semaine : Francesco, Bogdan et Alicia. Enfin, un grand merci à tous les doctorants et post-doctorants du groupe pour ces trois incroyables années, au labo comme en ville : Georgia, Razvan, Romain, Jean-François, Mirko, Sandy, Mauricio, Josep, Francesco, Christiano et Georgio.

Je tiens également à remercier la courageuse équipe de relecture, qui a sacrifié un peu de temps contre quelques bières et le plaisir de corriger au gros stylo rouge : Audrey, Julien, Sabrina, Caroline, Audrey, Anne-Cécile, Sylvain et Vincent.

Mes derniers remerciements vont bien évidemment à Şeyhan, qui m’a supporté tout

au long de la rédaction de cette thèse. Un très très grand merci ma chérie !

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Contexte de la thèse	1
1.2	Mesures et commande	3
1.3	Mesures et optimisation	5
1.4	Contributions	5
1.5	Organisation du mémoire	6
2	L'approche par les moments	9
2.1	Introduction	9
2.2	Théorie de la mesure	10
2.2.1	Mesures	10
2.2.2	Moments	11
2.2.3	Représentation	14
2.3	Problème généralisé des moments	15
2.3.1	Relaxations de Lasserre	17
2.3.2	Certificats de convergence	18
2.3.3	Rappels sur la dualité conique	19
2.3.4	Dualité conique pour les PGM	20
2.3.5	Problèmes univariés	21
2.3.6	Contraintes dénombrables	22
2.4	Aspects numériques	23
2.4.1	Résolution des relaxations	23
2.4.2	Construction des relaxations	24
2.5	Exemple : optimisation polynomiale	25
2.5.1	Vers une instance du PGM	25
2.5.2	Dualité : conditions suffisantes	26
2.5.3	Résumé	27
2.6	Conclusion	27
3	Contrôle mesuré	31
3.1	Introduction	31
3.2	Présentation du problème	32
3.3	Contrôles généralisés	34
3.4	Vers une instance du PGM	35
3.5	Dualité conique	39

3.6	Sauts de relaxation	42
3.7	Exemples académiques	44
3.8	Conclusion	51
4	Mesures-contrôles pour les systèmes linéaires	53
4.1	Introduction	53
4.2	Problèmes linéaires impulsionnels	54
4.2.1	Représentation interne des systèmes linéaires	55
4.2.2	Vers une instance du PGM	56
4.2.3	Dualité conique	58
4.2.4	Approximation polynomiale	61
4.2.5	Exemples	63
4.3	Applications au rendez-vous orbital	68
4.3.1	Présentation du problème	68
4.3.2	Application à la mission PRISMA	69
4.3.3	Améliorations	69
4.4	Conclusion	70
5	Mesures-contrôles pour les systèmes non-linéaires	71
5.1	Introduction	71
5.2	Présentation du problème	72
5.3	Équations différentielles régies par les mesures	73
5.4	Vers une instance du PGM	76
5.5	Dualité conique	82
5.6	Exemples	86
5.6.1	Construction pratique d'un problème	86
5.6.2	Contrôle d'attitude	88
5.6.3	Domaine non-convexe	89
5.6.4	Champ de vecteurs non-commutatif	91
5.7	Conclusion	92
6	Contrôles-mesures, systèmes à commutation	95
6.1	Introduction	95
6.2	PGM pour les systèmes à commutation	96
6.3	Réduction des variables mesurées	99
6.3.1	Systèmes polytopiques	99
6.3.2	Suppression des intégrateurs	100
6.4	Applications	100
6.4.1	Problème de contraste	101
6.4.2	Contrôle d'une voiture électrique	102
6.5	Conclusion	105
7	Perspectives	107
7.0.1	Extension à d'autres problèmes du calcul des variations	109
7.0.2	Extraction des solutions	110
7.0.3	Exploitation de la structure du problème	110

Liste des symboles

$\langle f, \mu \rangle$	Crochet de dualité entre la fonction continue f et la mesure μ , page 11
$AC([a, b])$	Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$, page 32
$BV([a, b])$	Espace des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$, page 55
$\mathcal{B}(\mathbf{X})$	L'ensemble des Boréliens de \mathbf{X} , page 10
$C(\mathbf{X})$	Espace des fonctions continues sur \mathbf{X} , page 11
$\deg \alpha$	Dégré d'un monôme d'exposant α ou d'un moment d'indice α , page 12
δ_x	Mesure de Dirac supportée en x , page 11
EDO	Équation Différentielle Ordinaire, page 55
$F(\mathbf{X})$	Espace des fonctions mesurables sur \mathbf{X} , page 11
$I_{\mathbf{X}}$	Fonction indicatrice de l'ensemble \mathbf{X} , page 76
λ	Mesure de Lebesgue, page 11
L_p	Espace des fonctions p -intégrables au sens de Lebesgue, page 33
$\mathcal{M}^+(\mathbf{X})$	Espace des mesures positives de Radon supportées sur \mathbf{X} , page 11
$\mathcal{M}(\mathbf{X})$	Espace des mesures signées de Radon supportées sur \mathbf{X} , page 11
$M_d(y)$	Matrice de localisation en $q(x)$ d'ordre d de la suite de moments y , page 13
$M_d(y)$	Matrice de moment d'ordre d de la suite de moments y , page 13
$M_d(y, z)$	Marginale de la matrice des moments d'ordre d par rapport aux variables z , page 13
$\mathcal{P}(\mathbf{X})$	Ensemble des mesures de probabilité sur \mathbf{X} , page 11
PGM	Problème Généralisé des Moments, page 15
$\mathbb{R}[x]$	Anneau des polynômes en x , page 12
$\Sigma[x]$	Ensemble des polynômes somme de carrés en les variables x , page 15

$\text{supp } \mu$	Support de la mesure μ , page 10
y_k^μ	Moment d'ordre k associé à la mesure μ , page 12

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Contexte de la thèse	1
1.2	Mesures et commande	3
1.3	Mesures et optimisation	5
1.4	Contributions	5
1.5	Organisation du mémoire	6

1.1 Contexte de la thèse

L'émergence de micro-calculateurs puissants, bon marchés, fiables et facilement programmables a complètement supplanté la commande analogique ces dernières décennies. Avec ceci, le besoin d'utiliser au mieux les ressources disponibles pousse l'ingénieur à utiliser ces calculateurs pour synthétiser des lois de commande allant au-delà d'un simple filtre linéaire comme dans l'automatique classique.

C'est dans ce contexte que la commande optimale, même en simple boucle ouverte, prend une importance grandissante dans la commande moderne des systèmes. On pense bien évidemment à la commande prédictive par modèle¹, qui propose de générer les commandes d'un système en résolvant à chaque pas de temps un problème de commande optimale.

Traditionnellement cantonnée aux applications aérospatiales par la nécessité technologique de réduire le poids des systèmes, la commande optimale apparaît à des endroits plus inattendus. En imagerie médicale par exemple, l'application d'un champ magnétique permet d'exciter certaines substances afin de mieux les distinguer par spectroscopie. Dans [LZB⁺10], il est montré qu'une réduction significative du temps d'exposition à ce champ magnétique – nocif pour le patient – peut être obtenue en utilisant un profil de commande optimisé au lieu du profil arbitraire imposé. Le prix à payer est une simple reprogrammation de l'ordinateur embarqué. Un autre exemple est celui de la robotique, où [TET12] utilisent des techniques relativement communes de commande optimale numérique pour

¹Anglais : Model Predictive Control (MPC).

générer le mouvement complexe d'un robot humanoïde passant d'une position allongée à une posture droite.

Nous partirons du postulat – largement partagé – qu'il est très difficile d'obtenir une solution analytique à ces problèmes en général, et qu'il est dès lors nécessaire d'avoir recours à une ou plusieurs méthodes numériques pour leurs résolutions. Nous identifions plusieurs considérations essentielles, sans ordre particulier, auxquelles devrait répondre une méthode numérique « idéale » pour être utilisée en boîte noire par un utilisateur, où être intégrée dans un programme quelconque :

Faible expertise La méthode numérique devrait se contenter d'une simple description de haut niveau du problème pour pouvoir le résoudre. En particulier, elle ne devrait pas nécessiter d'initialisations particulières, d'analyses fines de la part de l'utilisateur où de réglages précis des paramètres d'optimisation.

Optimalité globale Quitte à optimiser, pourquoi se contenter d'un minimum *local* ? Peut-on identifier quantitativement l'écart entre une solution arbitraire et une solution globalement optimale ? Peut-on se prononcer sur l'infaisabilité d'un problème afin de déclencher une procédure d'urgence quelconque ?

Complexité numérique Le temps nécessaire à obtenir une solution doit être bien évidemment compatible avec l'application. Il en va de même pour l'espace en mémoire nécessaire au programme.

Discrétisation rigoureuse Les problèmes de commande optimale étant généralement continus par essence, et les ordinateurs opérant sur des jeux finis de données, peut-on discrétiser le problème de manière rigoureuse par un nombre de paramètres finis ? Peut-on quantifier les erreurs induites ?

Comportements discontinus La modélisation de nombreux systèmes peut être grandement simplifiée en considérant une certaine discontinuité de son comportement. Par exemple, la commande *bang-bang* suppose que l'on peut changer instantanément la valeur du contrôle, les systèmes dits à *commutation* supposent que l'on peut changer subitement de mode de fonctionnement et la commande impulsionnelle/hybride autorise des trajectoires discontinues. Une méthode numérique devrait pouvoir traiter ces comportements naturellement.

Contraintes La méthode doit pouvoir traiter toutes sortes de contraintes (sur le contrôle, sur l'état, ou mixtes) qui apparaissent en pratique dans les problèmes d'ingénierie.

Dans ce mémoire, nous proposons d'utiliser les formalisme des mesures, à la fois comme outil de modélisation et d'objet sur lequel on peut optimiser, pour tenter de répondre au cahier des charges ci-dessus. Une des contributions de cette thèse est de pouvoir maintenant traiter les comportement discontinus, de sorte que la méthode répond au cahier des charges ci-dessus si ce n'est la complexité numérique, qui reste la principale faiblesse de l'approche. Néanmoins, les méthodes développées dans cette thèse permettent de mitiger une partie de ces effets pour une classe de systèmes très courante, comme montré par leur application sur des problèmes non-triviaux de commande optimale.

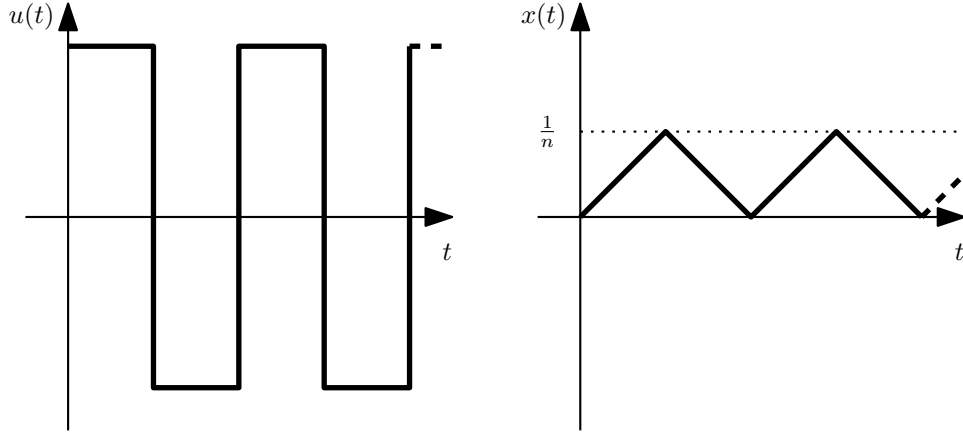


FIGURE 1.1 – Suite minimisante pour l'Exemple 1.1

1.2 Mesures et commande

Les mesures se sont très vite révélées nécessaires en commande optimale pour pouvoir *modéliser* certains phénomènes particuliers observés sur certains problèmes [Rou06] : les *phénomènes d'oscillation* et les *phénomènes de concentration*.

Les phénomènes d'oscillation apparaissent pour certains problèmes à champs de vecteur non convexes, où l'on observe que les suites minimisantes tendent à l'optimum vers un comportement où la commande oscille « infiniment vite », comme illustré par le célèbre exemple suivant :

Exemple 1.1 (Bolza) Soit le problème :

$$p := \inf_{u(t)} \int_0^1 \left((1 - u^2(t))^2 + x^2(t) \right) dt \quad (1.1)$$

t.q. $\dot{x}(t) = u(t),$
 $x(0) = 0.$

On montre facilement que $p = 0$. En effet, par la forme en somme de carrés du coût, on a bien évidemment $p \geq 0$. Ensuite, on peut construire une suite $u_n(t)$ de fonctions du temps définies par

$$u_n(t) = \begin{cases} +1 & t \in [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}] \cup \dots \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2)$$

telle que $u_n^2(t) = 1$, $t \in [0, 1]$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t)\|_\infty = 0$ (voir Figure 1.1). On a donc que le coût d'une telle suite tend asymptotiquement vers 0.

On peut également montrer par l'absurde que le coût ne peut être atteint pour un contrôle en tant que fonction du temps. En effet, pour atteindre le coût optimal, il faut nécessairement que $x(t) = 0$, ce qui implique si $u(t)$ est une fonction mesurable du temps sur $[0, 1]$ que $u(t) = 0$ presque partout. Mais alors, l'objectif vaut 1, une contradiction.

Pour palier à ce manque de fermeture des trajectoires minimisantes, L.C. Young a introduit dans les années 1940 les mesures portant son nom [You69], parfois appelées

contrôles généralisés [Gam78], et rappelées en §3.3. Dans ce formalisme, ces mesures sont supportées sur l'espace des contrôles, et par abus de langage, on peut parler de *contrôle mesuré*. Dans les années 1970, Rubio [Rub75, Rub76], Lewis et Vinter [VL78, LV80] ont généralisé ces concepts en introduisant des mesures supportées à la fois sur l'espace de contrôle et l'espace d'état, appelées mesures d'occupation (voir §3.4), ensuite utilisées essentiellement en commande stochastique, voir Kurtz et Stockbridge notamment [KS98]. Ceci permet de poser le problème de commande optimale comme un Problème Généralisé des Moments (PGM), c'est-à-dire un problème d'optimisation linéaire posé sur le cône des mesures positives.

Un autre problème qui peut apparaître en commande optimale lorsque le contrôle n'est pas borné en amplitude sont les *effets de concentration*, où l'action de la commande tend à se concentrer autour des quelques instants les plus favorables :

Exemple 1.2 (Absence de minimiseurs L^1) Soit le problème

$$\begin{aligned} J &= \inf_{u \in L^1} \int_0^1 |u(t)| dt \\ \text{t.q.} \quad &\dot{x} = t(1-t)u(t), \\ &x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \\ &u(t) \in L^1([0, 1]). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le coût de ce problème est $J = 4$, ce qui peut être montré par dualité en exploitant les résultats de §4.2.3. Une suite minimisante de contrôle respectant la contrainte sur l'état final, présentée sur la Figure 1.2, est par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{6}{3n^{-1} - 4n^{-3}} & \text{pour } \frac{1}{2} - n^{-1} \leq t \leq \frac{1}{2} + n^{-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour cette suite de contrôle, on obtient

$$J_n = \int_0^1 u_n(t) dt = \frac{12 n^{-1}}{3n^{-1} - 4n^{-3}} \tag{1.5}$$

qui tend bien vers 4. Néanmoins, la solution ne tend pas vers une fonction appartenant à L^1 .

De nouveau, les mesures permettent de capturer ce phénomène, ce qui a été très vite remarqué lors de la course vers l'espace des années 1960 où ces problèmes, parfois appelés impulsionnels, ont joué un rôle-clé. Pour le cas particulier des problèmes linéaires à norme minimale, Neustadt [Neu64] propose de relâcher les contrôles *par* des mesures, et obtient un PGM comme problème d'optimisation à résoudre. Nous nommerons synthétiquement cette idée par l'utilisation de *mesures-contrôles*, par opposition aux *contrôles mesurés* vus précédemment. Pour les systèmes non-linéaires affines en les contrôles, Schmaedeke [Sch65] propose aussi de modéliser les contrôles *par* des mesures et précise dans quel sens il faut interpréter l'équation différentielle de la dynamique. Il faudra attendre la fin des années 1980 avec les travaux de Bressan et Rampazzo [BR88] pour formaliser les cas où le contrôle est multiplié par une fonction de l'état.

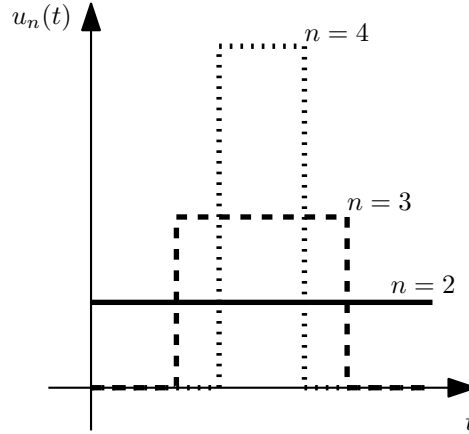


FIGURE 1.2 – Suite minimisante pour l'Exemple 1.2.

1.3 Mesures et optimisation

Comme expliqué plus haut, les mesures sont aussi un objet sur lequel il est désormais possible d'optimiser. Les problèmes dits des moments ont une longue histoire, où dès le début du vingtième siècle, des mathématiciens comme Hausdorff, Hamburger, Stieltjes, Markov, Tchebychev et bien d'autres ont cherché à caractériser les mesures par leurs moments. Néanmoins, la résolution pratique d'une classe suffisamment large en pratique des PGM a dû attendre la fin du vingtième siècle. Les deux facteurs déterminants furent certains résultats de géométrie algébrique réelle permettant la représentation des polynômes positifs sur des ensembles relativement génériques, ainsi que l'émergence de méthodes numériques efficaces pour l'optimisation sur le cône des matrices positives semi-définies.

La méthode décrite dans ce mémoire suit les travaux amorcés dans [Las00], où une hiérarchie de relaxations semi-définies est introduite pour résoudre les problèmes d'optimisation polynomiale, vus comme une instance du PGM. Dans [LHPT08], ces résultats sont étendus à la commande optimale, où le formalisme des mesures d'occupation est utilisé pour les systèmes où le contrôle est borné, c'est-à-dire pour les *contrôles mesurés*. Cette thèse est une suite logique de ces travaux et propose de les étendre aux problèmes avec contrôle non-borné, c'est-à-dire pour les *mesures-contrôles*, tout en améliorant les résultats de [LHPT08] pour une sous-classe de ces problèmes, voir la Table 1.1.

1.4 Contributions

Les contributions de cette thèse sont les suivantes :

- L'introduction de mesures d'occupation pour les systèmes à contrôle non-borné (aussi appelés systèmes impulsifs ou systèmes hybrides). Ceci permet de reformuler de tels problèmes de commande optimale comme des problèmes généralisés des moments, et de les résoudre globalement par l'approche par les moments. Ces développements sont en partie décrits dans [CAHL12] et [CAHL13a].
- L'utilisation de l'approche des moments et de techniques d'approximation polyno-

	Contrôles mesurés	Contrôles-mesures		
	Cas général (dont systèmes à commutation)	Systèmes linéaires	Cas général	Systèmes à commutation
Contrôles relâchés grâce aux mesures	[You69]	[Neu64]	[Sch65] [BR88]	Ce mémoire
Problème relâché en un PGM	[Rub75], [VL78], [LV80]			
Problème résolu comme un PGM	[LHPT08]			

TABLE 1.1 – Situation de cette thèse par rapport aux travaux cités dans cette introduction.

miale pour résoudre sans discrétisation les problèmes linéaires en norme minimale. Ces développements sont en partie décrits dans [CAHL13b].

- L'introduction de mesures d'occupation permettant de s'affranchir de la dépendance du contrôle pour les systèmes à commutation. Ceci permet d'obtenir un problème généralisé des moments avec des relaxations semi-définies plus favorables d'un point de vue calculatoire. Ces développements sont en partie décrits dans [HDC13].
- L'application des méthodes ci-dessus pour la résolution globale de deux problèmes concrets en commande optimale. Ces développements sont en partie décrits dans [BCCM13].

1.5 Organisation du mémoire

Le **chapitre 2** introduit la méthode générale de résolution de problèmes généralisés des moments, et le bagage théorique nécessaire. L'approche par les moments est alors détaillée sur l'exemple de l'optimisation polynomiale sous contraintes.

Le **chapitre 3** s'intéresse au problème de commande optimale à contrôle borné abordé dans [LHPT08], en détaillant certaines propriétés importantes de l'approche. Les mesures d'occupations sont introduites, ainsi que le problème généralisé des moments associé. Les relations de l'approche avec les conditions nécessaires et suffisantes sont explicitées.

Le **chapitre 4** s'intéresse aux problèmes de commande optimale des systèmes linéaires à contrôle non-borné. En suivant [Neu64], ce problème est relâché en un PGM, et nous proposons donc d'exploiter cette structure pour le résoudre directement en tant que tel. L'approche est détaillée sur l'exemple d'un rendez-vous orbital linéarisé.

Le **chapitre 5** s'intéresse aux problèmes de commande optimale des systèmes non-linéaires à contrôle non-borné. Nous proposons pour la première fois de relâcher un tel problème comme un PGM. Après une étude des conditions suffisantes associées, nous appliquons la méthode sur plusieurs exemples. Lorsque la solution est uniquement impulsionnelle, elle peut être déduite facilement des données renvoyées par le solveur numérique.

Le **chapitre 6** revient aux problèmes du chapitre 3 et montre comme une sous-classe de problèmes très courante, les systèmes à commutation, peut être traitée de manière bien plus efficace grâce à l'emploi des mesures-contrôles à la place des contrôles mesurés. Les différentes approches sont comparées sur deux exemples non-triviaux de commande optimale.

Chapitre 2

L'approche par les moments

Sommaire

2.1	Introduction	9
2.2	Théorie de la mesure	10
2.2.1	Mesures	10
2.2.2	Moments	11
2.2.3	Représentation	14
2.3	Problème généralisé des moments	15
2.3.1	Relaxations de Lasserre	17
2.3.2	Certificats de convergence	18
2.3.3	Rappels sur la dualité conique	19
2.3.4	Dualité conique pour les PGM	20
2.3.5	Problèmes univariés	21
2.3.6	Contraintes dénombrables	22
2.4	Aspects numériques	23
2.4.1	Résolution des relaxations	23
2.4.2	Construction des relaxations	24
2.5	Exemple : optimisation polynomiale	25
2.5.1	Vers une instance du PGM	25
2.5.2	Dualité : conditions suffisantes	26
2.5.3	Résumé	27
2.6	Conclusion	27

2.1 Introduction

Ce chapitre présente les rudiments pour résoudre numériquement les Problèmes Généralisés des Moments (PGM), c'est-à-dire les problèmes d'optimisation linéaire dont les variables de décision sont des mesures. L'importance de ce problème réside dans le fait que de nombreux problèmes de contrôle optimal – notamment ceux présentés aux chapitres 3, 4, 5 et 6 – peuvent être formulés de la sorte.

Survol du chapitre

La section 2.2 présente certains aspects de la théorie de la mesure, et montre comment les mesures peuvent être manipulées par leur suite de moments, de la même manière que les fonctions continues peuvent être manipulées par leurs coefficients de Fourier. La section 2.3 introduit le problème généralisé des moments, un problème d'optimisation linéaire sur l'espace des mesures. La section développe ensuite comment celui-ci peut être relâché par des problèmes d'optimisation semi-définie de taille finie, et différents résultats de convergence et de dualité sont donnés. La section 2.4 aborde la résolution numérique des relaxations semi-définies. Enfin, la section 2.5 illustre la méthode sur l'exemple de l'optimisation polynomiale en dimension finie.

2.2 Théorie de la mesure

Cette section introduit les mesures, les moments d'une mesure et comment celles-ci peuvent être représentées de manière unique par leurs moments.

2.2.1 Mesures

Dans cette section, nous introduisons les mesures définies sur un espace euclidien, qui seront l'outil principal pour encoder contrôles et trajectoires dans les chapitres suivants.

Définition 2.1 (Ensembles de Borel) *Soit un ensemble $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$. On définit l'ensemble des Boréliens $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ comme le plus petit σ -algèbre généré par les sous-ensembles ouverts de \mathbf{X} , c'est-à-dire la plus petite collection de ces ensembles stable par union arbitraire et intersection au plus dénombrable¹.*

La définition d'une mesure signée de Borel en découle :

Définition 2.2 (Mesure signée de Borel) *Une mesure signée est une fonction*

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (2.1)$$

telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\cup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\mathbf{X}_k)$ pour tous les ensembles disjoints $\mathbf{X}_k \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$.

Définition 2.3 (Mesure positive de Borel) *Une mesure positive est une mesure signée telle que $\mu(\mathbf{B}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$.*

Définition 2.4 (Support) *Le support $\text{supp } \mu$ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de Borel fermé dont le complément est le plus grand ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu(U) = 0$. Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \mu$ est l'union des supports de ses parties positives μ^+ et négatives μ^- , telles que données par la décomposition de Jordan (voir le théorème correspondant dans [RF10, §17.2]. μ est dite supportée sur un ensemble \mathbf{B} lorsque $\text{supp } \mu \subset \mathbf{B}$.*

¹Dans le reste de ce document, on entendra par dénombrable un ensemble en bijection avec les entiers, c'est-à-dire infini-dimensionnel

Une mesure de Borel μ est finie si $\mu(\mathbf{X}) \leq \infty$. On note l'ensemble de telles mesures supportées sur \mathbf{X} par $\mathcal{M}(\mathbf{X})$, et $\mathcal{M}^+(\mathbf{X})$ pour l'ensemble des mesures de Borel positives et finies. Par [RF10, Th. 21.5.14], on assimile ces ensembles aux mesures de Radon [RF10, §21.3] posées sur les mêmes ensembles compacts \mathbf{X} .

Remarque 2.5 *Dans la suite de ce mémoire, les mesures de Borel de $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ seront souvent définies par la valeur qu'elles renvoient pour un intervalle quelconque, ou pour $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, par la valeur qu'elles renvoient sur le produit cartésien de n intervalles. Ceci se justifie par le théorème de Carathéodory-Hahn, voir par exemple [RF10, Cor. 17.5.14].*

Définition 2.6 (Mesure de probabilité) Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X})$ est une mesure de probabilité lorsque $\mu(\mathbf{X}) = 1$. L'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbf{X} est noté $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.

Nous introduisons maintenant les deux mesures prototypes :

Exemple 2.7 (Mesure de Lebesgue) La mesure de Lebesgue λ de \mathbb{R}^n est la mesure qui renvoie le volume d'un ensemble \mathbf{A} . Par exemple, quand $n = 1$, la mesure de l'intervalle $[a, b]$ est $\lambda([a, b]) = b - a$.

Exemple 2.8 (Mesure de Dirac) La mesure de Dirac $\delta_\xi(dx)$ supportée en $x = \xi$, est la mesure telle que $\delta_\xi(\mathbf{A}) = 1$ si $\xi \in \mathbf{A}$, et vaut 0 sinon.

Jusqu'à présent, les mesures sont définies de manière très géométrique, c'est-à-dire par rapport aux valeurs qu'elles renvoient pour chaque ensemble de Borel. Il est également possible de définir une théorie de l'intégration pour celles-ci, c'est-à-dire que pour les fonctions mesurables $f \in F(\mathbf{X})$, on note son intégration par μ sur son support \mathbf{X} par :

$$\int_{\mathbf{X}} f d\mu(x) \quad \text{ou bien} \quad \int_{\mathbf{X}} f \mu(dx). \quad (2.2)$$

On peut donc voir une mesure μ comme une fonctionnelle $T_\mu(f) := \int_{\mathbf{X}} f d\mu(x)$ agissant sur $f \in F(\mathbf{X})$. Lorsque l'on se restreint aux fonctions continues, le théorème de Riesz [RF10, §21.5] affirme que l'espace vectoriel linéaire $[C(\mathbf{X})]^*$ dual aux fonctions continues munies de la norme suprémum est isomorphe² à $\mathcal{M}(\mathbf{X})$. On peut donc munir \mathcal{M} de la topologie *-faible, c'est-à-dire que l'on considèrera deux mesures égales $\mu = \nu$ si et seulement si

$$\langle f, \mu \rangle = \langle f, \nu \rangle, \quad \forall f \in C(\mathbf{X}). \quad (2.3)$$

Pour insister sur ces aspects de dualité, et pour simplifier les notations de ce mémoire, le crochet de dualité $\langle f, \mu \rangle$ sera utilisé pour représenter l'intégration d'une fonction continue $f \in C(\mathbf{X})$ par une mesure μ sur son support \mathbf{X} (ou de manière équivalente sur tout \mathbb{R}^n).

2.2.2 Moments

Dans cette section, nous poursuivons le but annoncé en introduction du chapitre, à savoir pouvoir manipuler les mesures par une représentation plus concrète. En effet, comme $C(\mathbf{X})$ est séparable, on peut se contenter de vérifier l'égalité (2.3) sur une base dense des fonctions continues. En pratique, nous nous limiterons aux polynômes, qui permettent de couvrir toutes les applications de ce mémoire. Ceci nous mène directement à considérer les moments d'une mesure.

²On rappelle que \mathbf{X} est considéré compact.

Définition 2.9 (Monômes) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur d'entier $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Un monôme est défini par la notation multi-indicée

$$x^\alpha := \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}. \quad (2.4)$$

Le degré d'un monôme de multi-exposant $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est alors $\deg \alpha := \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Définition 2.10 (Moments) Le moment de multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ d'une mesure $\mu(dx)$, $x \in \mathbb{R}^n$, est l'intégration du monôme x^α par rapport à μ :

$$y_\alpha^\mu := \langle x^\alpha, \mu \rangle. \quad (2.5)$$

S'il n'y a pas lieu de confondre sur quelle mesure le moment porte, on le note simplement par y_α .

Le degré d'un moment est défini comme le degré de son monôme associé. On note la suite infinie des moments par $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$, ou simplement y .

En imposant la base des monômes (2.4), on définit donc un polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré d , par la combinaison linéaire de monômes :

$$p(x) := \sum_{|\alpha| \leq d} p_\alpha x^\alpha. \quad (2.6)$$

Par abus de notation, on note également $p := (p_\alpha)_{|\alpha| \leq d}$ le vecteur de coefficients dans la base des monômes $(x^\alpha)_\alpha$. Pour éviter les ambiguïtés lorsque les deux notations cohabitent, le polynôme sera noté explicitement par $p(x)$.

Par linéarité de l'intégration, la définition suivante est aux polynômes ce que les moments sont aux monômes :

Définition 2.11 (Fonctionnelle de Riesz) Soit une suite multi-indexées de réels $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$. La fonctionnelle de Riesz $\ell_y : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ qui lui est associée, agissant sur les polynômes $p(x) = \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha$, est définie par

$$p(x) \mapsto \ell_y(p(x)) := \sum_\alpha p_\alpha y_\alpha, \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}[x]. \quad (2.7)$$

Lorsque y est une suite de moments, donc que $y_\alpha = \int x^\alpha d\mu$ pour une certaine mesure de Borel μ , cette fonctionnelle n'est rien d'autre que la restriction de $\langle \cdot, \mu \rangle$ aux polynômes, exprimée explicitement dans la base des monômes (2.4), puisque

$$\ell_y(p(x)) = \sum_\alpha p_\alpha y_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha \int x^\alpha \mu(dx) = \int \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha \mu(dx) = \int p(x) \mu(dx).$$

Exemple 2.12 Le polynôme

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto p(x) = 1 + 2x_2 + 3x_1^2 + 4x_1x_2$$

possède le vecteur de coefficients $p \in \mathbb{R}^6$ dont les éléments multi-indexés sont $p_{00} = 1$, $p_{10} = 0$, $p_{01} = 2$, $p_{20} = 3$, $p_{11} = 4$, $p_{02} = 0$. Sa fonctionnelle de Riesz s'exprime donc par

$$\ell_y(1 + 2x_2 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = y_{00} + 2y_{01} + 3y_{20} + 4y_{11}.$$

On remarque en particulier le traitement de la constante.

Pour tout polynôme $p(x)$ et toute mesure positive $\mu \in \mathcal{M}^+$, on observe que $\langle p^2(x), \mu \rangle \geq 0$ par positivité du carré d'une fonction. On a donc

$$0 \leq \langle p^2(x), \mu \rangle = \left\langle \left(\sum_{\alpha=0}^d p_{\alpha} x^{\alpha} \right)^2, \mu \right\rangle = p' M_d(y) p \quad (2.8)$$

avec M_d défini par :

Définition 2.13 (Matrice de moment) La matrice de moment $M_d(y)$ d'ordre d d'une suite multi-indexée de réels y est la matrice de Gram de la forme quadratique $p(x) \mapsto \ell_y(p^2(x))$, avec $p(x)$ un polynôme de degré d . Ses coefficients, multi-indexés par (i, j) , s'écrivent donc

$$M_d(y)[i, j] = \ell_y(x^{i+j}) = y_{i+j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_d^n. \quad (2.9)$$

Définition 2.14 (Marginale de la matrice de moment) La marginale $M_d(y, z)$ par rapport à z de la matrice de moments $M_d(y)$ est la matrice de moments ne faisant intervenir que les moments en z . Elle tire son nom du fait qu'elle s'interprète comme la matrice des moments de la marginale du μ par rapport à z , c'est-à-dire la projection de μ sur l'espace paramétré par z .

De manière similaire, si $q(x) \geq 0$ sur \mathbf{X} (par exemple, parce que $q(x) \geq 0$ fait partie de la définition de \mathbf{X}), on a donc

$$0 \leq \langle q(x)p^2(x), \mu \rangle = \left\langle \left(\sum_{\alpha=0}^d p_{\alpha} x^{\alpha} \right)^2 q(x), \mu \right\rangle = p' M_d(q(x) * y) p \quad (2.10)$$

avec

Définition 2.15 (Matrice des moments localisée) La matrice de moments $M_d(q * y)$ localisée en $q(x)$ et d'ordre d de la suite de moments y est la matrice de Gram de la forme quadratique $p(x) \mapsto \ell_y(q(x)p^2(x))$, avec $p(x)$ un polynôme de degré d . Ses coefficients, multi-indexés par (i, j) , s'écrivent donc

$$M_d(q * y)[i, j] = \ell_y(q(x)x^{i+j}) \quad (2.11)$$

$$= \sum_k q_k y_{i+j+k}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_d^n. \quad (2.12)$$

La notation $M_d(q * y)$ insiste sur la bilinéarité entre q and y . En particulier, quand y est une suite de moment représentée par μ , on peut aussi définir $M_d(q * y^{\mu})$ comme la matrice de moments $M_d(y^{\nu})$, exprimée dans les moments de μ , de la mesure $\nu(dx) := q(x)\mu(dx)$.

Exemple 2.16 Pour $n = 2$ et $q(x) = 1 + 2x_1 + 3x_2$, on a

$$M_0(y) = M_0(y, x_1) = \begin{bmatrix} y_{00} \end{bmatrix}, \quad M_0(q * y) = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{10} + 3y_{01} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$M_1(y) = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} \end{bmatrix}, \quad M_1(y, x_1) = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} \\ y_{10} & y_{20} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$M_1(q * y) = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{10} + 3y_{01} & y_{10} + 2y_{20} + 3y_{11} & y_{01} + 2y_{11} + 3y_{02} \\ y_{10} + 2y_{20} + 3y_{11} & y_{20} + 2y_{30} + 3y_{21} & y_{11} + 2y_{21} + 3y_{12} \\ y_{01} + 2y_{11} + 3y_{02} & y_{11} + 2y_{21} + 3y_{12} & y_{02} + 2y_{12} + 3y_{03} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

On obtient donc que pour une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}^+$ supportée sur

$$\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : q_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, n_{\mathbf{X}}\}, \quad (2.16)$$

les matrices de moments sont semi-définies positives $\forall d \in \mathbb{N}$:

$$M_d(y) \succeq 0, \quad M_d(q_i * y) \succeq 0. \quad (2.17)$$

Puisque $M_d(y) \succeq 0$ implique $M_{d-1}(y) \succeq 0$, on peut noter synthétiquement (2.17) par

$$M(y) \succeq 0, \quad M(q_i * y) \succeq 0, \quad (2.18)$$

où les opérateurs $M(y)$ et $M(q_i * y)$ peuvent être vus comme les matrices de moments « infinies ».

2.2.3 Représentation

A la section précédente, il est montré que les matrices de moments d'une mesure sont semi-définies positives. Pour pouvoir manipuler les mesures par leurs moments, il faut caractériser les ensembles \mathbf{X} pour lesquels l'implication réciproque est vraie, c'est-à-dire pour lesquels la semi-définie positivité de certaines matrices de réels associées à la suite $y = (y_\alpha)$ implique l'existence d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X})$ vérifiant (2.5) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Une telle mesure μ est dite *représentante*. Pour les ensembles \mathbf{X} compacts, on peut même montrer l'unicité d'une telle mesure si elle existe.

Caractériser de telles conditions de représentation est à la base de la théorie des moments. Le théorème suivant, très général, fournit un premier élément de réponse :

Théorème 2.17 (Riesz-Haviland) *Soit \mathbf{K} un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n . Alors, une suite de moments y possède une mesure représentante si et seulement si $\ell_y(p) \geq 0$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}[x]$ non-négatifs sur \mathbf{K} .*

En observant (2.8) et (2.10), une caractérisation des polynômes positifs par des sommes de carrés, éventuellement pondérés par les polynômes $q_i(x) \geq 0$ définissant \mathbf{X} permettrait d'exploiter le théorème de Riesz-Haviland. C'est le cas pour une classe suffisamment large d'ensembles :

Hypothèse 2.18 (Compacité/représentation) *Les ensembles \mathbf{X} sont basiques semi-algébriques, c'est-à-dire définis par*

$$\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : q_k(x) \geq 0, k = 1, \dots, n_{\mathbf{X}}\} \quad (2.19)$$

pour des polynômes donnés $q_k \in \mathbb{R}[x]$, $k = 1, \dots, n_{\mathbf{X}}$.

De plus, les ensembles sont supposés compacts et archimédiens, c'est-à-dire³ qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $s_k \in \Sigma[x]$, $k = 0, 1, \dots, n_{\mathbf{X}}$, tels que le polynôme quadratique $x \rightarrow N - |x|_2^2$ peut s'écrire

$$N - |x|_2^2 = s_0(x) + \sum_{k=1}^{n_{\mathbf{X}}} s_k(x) q_k(x). \quad (2.20)$$

³D'autres définitions équivalentes d'ensembles archimédiens sont possibles, voir [Las09, Th. 2.15].

Il faut noter que cette dernière condition d'archimédecité peut être satisfaite sans perte de généralité pour les ensembles compacts. En effet, il existe toujours pour ces ensembles une boule de rayon N suffisamment grand contenant l'ensemble. Il suffit alors de rajouter la contrainte $N - |x|_2^2 \geq 0$ à la définition de \mathbf{X} pour satisfaire trivialement la condition.

Ces ensembles possèdent une caractérisation explicite des polynômes positifs en termes de sommes de carrés [Put93] :

Théorème 2.19 (Positivstellensatz de Putinar) *Soit un ensemble \mathbf{X} respectant l'Hypothèse 2.18. Si le polynôme p est strictement positif sur \mathbf{X} , alors il peut se décomposer en*

$$p(x) = s_0(x) + \sum_{k=1}^{n_{\mathbf{X}}} s_k(x) q_k(x) \quad (2.21)$$

où chaque $s_k \in \Sigma[x]$ appartient aux polynômes somme de carrés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être représentés comme une somme finie de polynômes au carré.

Par le Théorème 2.17, on obtient alors le corollaire [Las09, Th. 3.8] par dualité :

Corollaire 2.20 (Représentation des mesures sur les ensembles compacts) *Soit un ensemble \mathbf{X} satisfaisant l'Hypothèse 2.18. Alors $\{y_\alpha\}$ a une mesure représentante $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X})$ si et seulement si*

$$M(y) \succeq 0, \quad M(q_k * y) \succeq 0, \quad k = 1, \dots, n_X. \quad (2.22)$$

Remarque 2.21 (Contraintes égalitaires) *Le cas de contraintes égalitaires $g_k = 0$ dans la définition de l'ensemble \mathbf{X} satisfait l'Hypothèse 2.18 de compacité et se traite en considérant à leurs places les deux inégalités $g_k \geq 0$ et $-g_k \geq 0$. En particulier, dans le Théorème 2.19 de Putinar, le multiplicateur s_k associé à $g_k = 0$ devient donc la différence de deux sommes de carrés et est donc arbitraire. Dans le Théorème 2.20 dual, on obtient que l'égalité $g_k = 0$ implique donc logiquement une suite d'égalités linéaires sur les moments, par l'entremise de $M(q_k * y) = 0$. En optimisant sur les suites de moments comme proposé dans la suite de ce mémoire, il est donc avantageux de traiter les contraintes égalités de la sorte.*

2.3 Problème généralisé des moments

Les mesures définies à la section précédente permettent de manipuler contrôles et trajectoires lors des chapitres suivants. Cette section introduit quant à elle le Problème Généralisé des Moments (PGM), dans lequel seront formulés tous les problèmes de commande optimale de ce document.

Problème 2.22 (Problème généralisé des moments)

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{\mu} \sum_{j=1}^m \langle c_j, \mu_j \rangle := \inf \langle c, \mu \rangle \\ \text{t.q. } &\mathcal{A}\mu = b, \\ &\mu_j \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_j), j \in \mathbf{J}, \end{aligned}$$

où :

(i) Chacune des m mesures μ_j , $j \in \mathbf{J} := \{1, \dots, m\}$, les variables de décision du problème, est posée sur un compact donné, noté par

$$\mathbf{X}_j := \left\{ x_j \in \mathbb{R}^{n_j} : q_k^j(x_j) \geq 0, k \in \mathbf{N}_j \right\}, \quad j \in \mathbf{J}; \quad (2.23)$$

(ii) Chacun des ensembles $\mathbf{X}_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ respecte l'Hypothèse 2.18 de compacité/représentation;

(iii) Le coût est un vecteur de m fonctions $c_j \in \mathbb{R}[x_j]$, $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$;

(iv) $\mathcal{A} : \prod_{j \in \mathbf{J}} \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_j) \mapsto \mathbb{R}^l$ est un opérateur linéaire matérialisant l contraintes de moments, pouvant donc se représenter par une matrice de polynômes $a_{ij} \in \mathbb{R}[x_j]$, $j \in \mathbf{J}$, $i \in \mathbf{I} := \{1, \dots, l\}$;

(v) $b \in \mathbb{R}^l$.

Ce problème est dit *semi-infini* car le nombre de contraintes linéaires est fini, mais l'espace de décision est bien infini-dimensionnel. Le cas de contraintes dénombrables est traité en §2.3.6.

Nous définissons une condition suffisante qui garantit l'existence de solutions optimales à ce problème :

Hypothèse 2.23 *Il existe $i \in \mathbf{I}$ tel que, pour chaque $j \in \mathbf{J}$, $a_{ij} > 0$ sur \mathbf{X}_j .*

La condition $a_{ij} > 0$ est présente naturellement dans bon nombre de problèmes. Pour l'optimisation polynomiale en §2.5, la contrainte $\langle 1, \mu \rangle = 1$ implicite à l'espace \mathcal{P} satisfait cette condition, ainsi que toute contrainte bornant⁴ la masse des mesures, comme par exemple $\sum_{j \in \mathbf{J}} \langle 1, \mu_j \rangle \leq 1$. Enfin, on note que, si nécessaire, la condition s'adapte en prenant une combinaison linéaire de contraintes exhibant une telle propriété.

On obtient directement :

Proposition 2.24 *Soit l'Hypothèse 2.23 satisfaite. Si le Problème 2.22 possède une solution admissible, alors il possède au moins une solution optimale.*

Preuve Ceci est une conséquence directe du théorème d'Alaoglu [RF10, Section 15.1]. En effet, les ensembles \mathbf{X}_j sont compacts, et l'Hypothèse 2.23 borne chacune des mesures posées sur ces ensembles. Le théorème d'Alaoglu démontre la compacité de la boule unité dans l'espace des mesures à support compact pour la topologie $*$ -faible. Toute suite de mesures admissibles pour le Problème 2.22 possède donc une sous-suite convergente. ■

⁴Il faut alors ajouter des variables de relèvement pour changer l'inégalité en égalité.

2.3.1 Relaxations de Lasserre

Les problèmes généralisés des moments définis plus haut sont bien sûr très difficiles à résoudre, leur généralité leur permettant de couvrir aussi bien de nombreux problèmes d'optimisation discrète NP-difficiles que des problèmes d'optimisation continue comme aux chapitres suivants. On peut dès lors difficilement espérer les résoudre directement et dans le cadre le plus général.

L'approche proposée par Lasserre [Las08] est donc d'exploiter les problèmes possédant une structure particulière, et de les relâcher par des problèmes convexes de dimension finie, que nous présentons dans cette section. Au vu des résultats de §2.2 et en particulier le Corollaire 2.20, les problèmes à données polynomiales sont de bons candidats pour de tels problèmes structurés⁵, puisque le Problème 2.22 se réécrit par :

Problème 2.25 (PGM sur les suites de moments)

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_y \ell_y(c) \\ \text{t.q. } &\sum_{j=1}^m \ell_y(a_{ij}) = b_i, \quad i \in \mathbf{I}, \\ &M(y^{\mu_j}) \succeq 0, \quad j \in \mathbf{J}, \\ &M(q_k^j * y^{\mu_j}) \succeq 0, \quad k \in \mathbf{N}_j, j \in \mathbf{J}, \end{aligned}$$

où y est l'agrégation des suites de moments de chaque mesure : $y := \{y^{\mu_1}, \dots, y^{\mu_m}\}$.

Dans ce problème, la cardinalité de l'ensemble des variables de décision (i.e. les m suites de moments y^{μ_i}) est dénombrable. Il est donc naturel de tronquer ce problème en ne conservant que les moments de degrés faibles dans chacune des suites. On définit la relaxation d'ordre entier r du PGM par

Problème 2.26 (Relaxation de Lasserre)

$$\begin{aligned} J_M^r &= \inf_{(y_\alpha)} \ell_y(c) \\ \text{t.q. } &\sum_{j=1}^m \ell_y(a_{ij}) = b_i, \quad i \in \mathbf{I} \\ &M_d(y^{\mu_j}) \succeq 0, \quad j \in \mathbf{J} \\ &M_{d-v_k^j}(q_k^j * y^{\mu_j}) \succeq 0, \quad k \in \mathbf{N}_j, j \in \mathbf{J} \\ &|\alpha| \leq 2r \end{aligned}$$

où $v_k^j = (\deg q_k^j)/2$ pour $\deg q_k^j$ pair, $(\deg q_k^j + 1)/2$ sinon.

⁵C'est pour cela que le Problème 2.22 est directement formulé sur les fonctions polynomiales et non sur les fonctions continues.

Remarque 2.27 (Première relaxation) *On note par r_0 le plus petit entier tel que la relaxation d'ordre r_0 du problème ci-dessus est bien posée, c'est-à-dire pour lequel :*

$$\max\{\deg c, \deg a_{ij}, \deg q_k^j\} \leq 2r_0. \quad (2.24)$$

Remarque 2.28 *L'Exemple 4.14 page 63 explicite le passage complet d'un PGM semi-infini vers la première relaxation.*

Comme à chaque relaxation d'ordre supérieur, on ne fait que rajouter des contraintes sur les moments, on a pour $r \geq r_0$:

$$J_M^r \leq J_M^{r+1}. \quad (2.25)$$

On peut également montrer qu'il y a bien convergence asymptotique [Las09, Ch. 4] selon des hypothèses très générales :

Théorème 2.29 (Convergence asymptotique des relaxations) *Si l'Hypothèse 2.23 est satisfaite, alors les relaxations convergent asymptotiquement :*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_M^r = J_M. \quad (2.26)$$

2.3.2 Certificats de convergence

La section précédente énonce la convergence asymptotique des relaxations. Pour le cas des PGMs semi-infinis tels que formulés pour le Problème 2.22, il est aussi possible de détecter la convergence à un degré de relaxation donné.

Proposition 2.30 (Certificats de convergence finie) *Soit y la solution de Problème 2.26 à un ordre de relaxation $r \geq r_0$. Si*

$$\text{rang } M_{r-1}(y) = \text{rang } M_r(y) = k \quad (2.27)$$

alors $J_M^r = J_M$.

De plus, il existe une mesure atomique supportée sur k points pour lequel le coût optimal est atteint. Le support de celle-ci ainsi que les poids relatifs de chaque point du support peuvent alors être extraits par l'algorithme d'algèbre linéaire présenté en [Las09, Ch. 4.3].

L'importance de ce résultat est révélée par le théorème suivant [Las09, Th. 4.4] :

Théorème 2.31 (Forme générique des minimiseurs) *Soit au moins un élément admissible pour le Problème 2.22, et soit l'Hypothèse 2.23 satisfaite. Alors $J_M > -\infty$ et il existe toujours une solution μ supportée sur au plus ℓ points, ℓ étant le nombre de contraintes linéaires imposées au problème.*

2.3.3 Rappels sur la dualité conique

Lorsque l'on considère les polynômes comme un sous-ensemble des fonctions continues sur les ensembles compacts, le Problème 2.22 peut être abordé selon le formalisme de la dualité conique. Il en découle naturellement la formulation d'un problème dual⁶. Nous rappelons d'abord certains résultats de dualité conique en suivant [AN87, Ch. 3] ou son résumé limpide dans [Bar02, Ch. 4].

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times F_p \rightarrow \mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_d : E_d \times F_d \rightarrow \mathbb{R}$ deux crochets de dualité entre deux espaces localement convexes. Soit le vecteur $x_p \in E_p$ la variable de décision pour le problème primal, et $x_d \in F_d$ la variable de décision du problème dual. Soit $\mathbf{V} \subset E_p$ un cône convexe fermé et \mathbf{V}^* son cône dual. Soit l'opérateur $\mathcal{A} : E_p \rightarrow E_d$ linéaire et continu, et soit $\mathcal{A}^* : E_d^* \rightarrow E_p^*$ son opérateur adjoint.

On définit alors le *problème primal sous forme canonique* comme le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} P &= \inf_{x_p} \langle x_p, c \rangle_p \\ \text{t.q. } &\mathcal{A}x_p = b, \\ &x_p \in \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

De manière similaire, on définit le *problème dual sous forme standard* par :

$$\begin{aligned} D &= \sup_{x_d} \langle b, x_d \rangle_d \\ \text{t.q. } &c - \mathcal{A}^*x_d \in \mathbf{V}^*, \\ &x_d \in E_d^*. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Exemple 2.32 (Optimisation linéaire) L'optimisation linéaire en dimension finie est un cas particulier de cette formulation, en associant

- E_p et F_p à \mathbb{R}^n , de sorte que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n entre un vecteur de variables de décision x_p et un vecteur de coûts c ;
- E_d et F_d à \mathbb{R}^m , de sorte que $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^m entre un vecteur de contraintes (du primal) b et les variables de décision duales x_d ;
- \mathbf{V} est l'orthant positif sur \mathbb{R}^n , contraignant chacun des éléments de x_p à être positif. Son cône dual \mathbf{V}^* est aussi \mathbb{R}_+^n ;
- L'opérateur \mathcal{A} est une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, et \mathcal{A}^* est sa transposée.

Comme pour l'optimisation linéaire en dimension finie, on obtient les résultats bien connus [Bar02, Th. IV.6.2] :

Proposition 2.33 (Dualité faible) *Pour tout x_p admissible pour le problème primal et x_d admissible pour le problème dual, $\langle x_p, c \rangle_p \geq \langle b, x_d \rangle_d$. En particulier,*

$$P \geq D. \tag{2.30}$$

⁶On entend ici par problème « primal » le problème d'intérêt ou une de ses reformulations directes, et par problème « dual » le fait que celui-ci s'obtient de manière indirecte.

Proposition 2.34 (Complémentarité) *Soit $P = D$ et x_p^* et x_d^* optimaux pour leur problème respectif, c'est-à-dire $\langle x_p^*, c \rangle_p = P$ et $\langle b, x_d^* \rangle_d = D$. Alors,*

$$\langle x_p^*, c - \mathcal{A}^* x_d^* \rangle_p = 0, \quad \langle \mathcal{A} x_p - b, x_d^* \rangle_d = 0. \quad (2.31)$$

Si $P > D$, on dit qu'il y a un *saut de dualité*, et sinon on a *dualité forte*. Contrairement à l'optimisation linéaire en dimension finie, cette condition est loin d'être garantie. Nous présentons ici une condition suffisante essentielle [AN87, Th. 3.10], [Bar02, Th. IV.7.2] :

Théorème 2.35 (Absence de saut de dualité) *Soit un vecteur x_p admissible pour le problème primal. Supposons que le cône*

$$\mathbf{R} := \{(\langle x_p, c \rangle_p, \mathcal{A} x_p) : x_p \in \mathbf{V}\}, \quad (2.32)$$

l'image de cône \mathbf{V} par l'opérateur \mathcal{A} et le coût c , soit fermé dans la topologie faible associée à $\mathbb{R} \times E_d$. Alors

$$P = D. \quad (2.33)$$

La section suivante explore l'application directe de ce résultat sur le Problème 2.22 et ses conséquences.

2.3.4 Dualité conique pour les PGM

En exploitant les résultats de la section précédente, on reconnaît derrière le Problème 2.22 un problème primal sous forme canonique, avec les correspondances :

- La variable de décision x_p est un vecteur de mesures

$$(\mu_1, \dots, \mu_m)' \in \prod_{j=1}^m \mathcal{M}(\mathbf{X}_j) \quad (2.34)$$

considérées dans la topologie *-faible ;

- c est le vecteur des coûts

$$(c_1, \dots, c_m)' \in \prod_{j=1}^m C(\mathbf{X}_j), \quad (2.35)$$

vus comme un sous ensemble des fonctions continues ;

- $b \in \mathbb{R}^l$ matérialise les l contraintes.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ est l'intégration des fonctions continues par les mesures de Radon ;
- Le cône \mathbf{V} est donc celui des mesures positives, et \mathbf{V}^* est celui des fonctions positives.
- $x_d \in \mathbb{R}^l$ est un vecteur de l variables adjointes, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^l .

Ceci mène directement au :

Problème 2.36 (Dual du PGM)

$$\begin{aligned}
P &= \sup_{\gamma} b' \gamma \\
\text{t.q. } &z(x_j) := c_j(x_j) - \sum_{i \in \mathbf{I}} \gamma_i a_{ij}(x_j) \geq 0, \quad \forall x_j \in \mathbf{X}_j, \quad j \in \mathbf{J}, \\
&\gamma \in \mathbb{R}^l.
\end{aligned}$$

Le théorème suivant reprend une condition suffisante garantissant la dualité forte et donc l'absence de saut de dualité [Las09, Th. 4.4] :

Théorème 2.37 *Soit l'Hypothèse 2.23 satisfaite. Si le Problème 2.22 Généralisé des Moments possède une solution admissible, alors la dualité forte tient :*

$$P = J_M. \quad (2.36)$$

La preuve de ce théorème est très proche de la preuve présentée pour le Lemme 4.9 page 59, où nous renvoyons le lecteur. Ici, c'est l'existence de $a_{ij} > 0$ qui permet de borner les suites de mesures, et non la forme spéciale du coût. Ceci permet de garantir la fermeture du cône \mathbf{R} tel que défini au Théorème 2.35.

En utilisant le Corollaire 2.20 pour la représentativité des moments, on utilise donc implicitement les certificats par somme de carrés de Putinar présentés au Théorème 2.19 pour les polynômes positifs, de sorte qu'aux relaxations primales correspondent les renforcements du dual suivants :

Problème 2.38 (Renforcement du dual d'ordre r)

$$\begin{aligned}
P^r &= \sup_{\gamma} b' \gamma \\
\text{t.q. } &z(x_j) = s_0^j + \sum_{k \in \mathbf{N}_j} s_k^j(x_j) q_k^j(x_j), \quad j \in \mathbf{J}, \quad x_j \in \mathbf{X}_j, \\
&s_k^j \in \Sigma[x_j] : \deg s_k^j + \deg q_k^j \leq 2r, \\
&\gamma \in \mathbb{R}^l.
\end{aligned}$$

On a donc simplement que la contrainte $z(x) \geq 0$ est remplacée par un certificat somme de carrés de degré donné.

2.3.5 Problèmes univariés

Pour les problèmes posés sur \mathbb{R} seulement, le cône des polynômes positifs et des polynômes somme de carrés se confondent. De plus, le degré de chacun des termes de la somme de

carré n'excède pas la moitié du degré du polynôme positif. On a donc qu'une suite de moments tronquée peut être certifiée comme représentante [Las09, Th. 3.2] à degré connu, impliquant :

Proposition 2.39 *Soit chacune des mesures du Problème 2.22 Généralisé des Moments supportée sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire représenté algébriquement par $\mathbf{X}_j = \{x_j \in \mathbb{R} : 1 - x_j^2 \geq 0\}$. Alors la relaxation d'ordre r_0 sous la forme du Problème 2.26 est nécessaire et suffisante.*

Pour ces problèmes univariés, on peut donc s'affranchir d'utiliser la hiérarchie de relaxation présentée en §2.3.1.

2.3.6 Contraintes dénombrables

Nous mentionnons maintenant brièvement comment on peut rajouter au Problème 2.22 des contraintes sous la forme

$$\langle \mathcal{L}^*(v), \mu \rangle = \langle v, \mu_b \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[x] \quad (2.37)$$

où \mathcal{L}^* est un opérateur linéaire comme par exemple $\mathcal{L}^* : C(\mathbf{X}) \mapsto C(\mathbf{X})$. C'est le cas des PGM présentés aux Chapitres 3, 5 et 6, où les notations sont établies rigoureusement. Nous supposons pour simplifier la discussion que l'application de \mathcal{L}^* associe à un polynôme dans un espace donné un polynôme dans un autre espace donné. C'est le cas de tous les opérateurs rencontrés dans ce mémoire, car ils ne font appel qu'à des sous-opérations simples : additions, multiplications, dérivations⁷, etc.

Nous étudions maintenant quels résultats restent vrais malgré ces nouvelles contraintes, et ceux qui ne tiennent plus. Nous généralisons d'abord l'Hypothèse 2.23 :

Hypothèse 2.40 *Il existe $i \in \mathbf{I}$ et $v_0 \in \mathbb{R}[x]$ tels que, pour chaque $j \in \mathbf{J}$, au moins une de ces conditions est satisfaite sur \mathbf{X}_j :*

- $a_{ij} > 0$ et $\langle \mathcal{L}^*(v_k), \mu_j \rangle \geq 0$;
- $\langle \mathcal{L}^*(v_0), \mu_j \rangle > 0$, et $a_{ij} \geq 0$.

Alors, sous cette hypothèse modifiée :

- Les conclusions du Théorème 2.24 restent inchangées, et le minimum du PGM sera donc atteint s'il existe au moins un élément admissible.
- Si chaque relaxation contient les v_0 nécessaires à l'imposition de l'Hypothèse 2.23, et que l'on tronque $\mathcal{L}^*(v)$ pour ne garder que les polynômes de degré inférieur à $2r$, alors le Théorème 2.29 sur la convergence asymptotique des relaxations reste vrai [Las09, Th. 4.3].
- Le Théorème 2.31 sur la caractérisation générique des minimiseurs du PGM en tant que mesures atomiques n'est évidemment plus vrai. Par exemple, la contrainte $\langle v, \mu \rangle = \langle v, \lambda \rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}[x]$ impose trivialement que la mesure μ soit la mesure de Lebesgue.

⁷Dans ce cas, il faut modifier de manière appropriée l'espace de départ de \mathcal{L}^*

- En utilisant le même contre-exemple, la Proposition 2.39 pour le cas spécial des mesures posées sur \mathbb{R} n'est plus vrai.
- En définissant soigneusement les espaces de départ de \mathcal{L}^* , il est possible d'appliquer directement le Théorème 2.35 pour garantir l'absence de sauts de dualité. Le problème dual possède de nouvelles variables sous la forme de polynômes, mais il se peut que le suprémum du problème dual ne soit pas atteint. Nous renvoyons aux sections §3.5 et §5.5 pour les développements rigoureux.

2.4 Aspects numériques

La section précédente traite des aspects théoriques de l'approche par les moments pour la résolution des PGM. Cette section présente certains aspects numériques et algorithmiques pour l'implémentation de telles relaxations.

2.4.1 Résolution des relaxations

Les relaxations du Problème 2.3.1 sont des problèmes d'optimisation convexe de dimension finie. Elles peuvent donc être résolues efficacement en temps polynomial par des techniques d'optimisation semi-définies bien établies [BV04]. Pour le reste de ce mémoire, nous utiliserons par défaut le logiciel SeDuMi [Stu99], disponible en tant que boîte à outil Matlab. Nous utiliserons quelquefois le logiciel MOSEK [dt13], qui implémente le même type d'algorithme auto-dual que SeDuMi, tout en étant significativement plus rapide pour un problème donné.

Nous étudions brièvement la complexité algorithmique de la hiérarchie en fonction de l'ordre de relaxation r . Sans perte de généralité, nous considérons une instance du Problème 2.22 avec m mesures posées chacune sur un espace euclidien de même dimension n . A un ordre de relaxation r donné, la complexité de la résolution de la relaxation est dominée par celle du problème :

$$\inf_y c'y \quad (2.38)$$

$$\text{t.q. } M_d(y^{\mu_j}) \succeq 0, \quad j = 1 \dots m, \quad (2.39)$$

puisque les tailles des matrices des moments de localisation sont dominées par celle de la matrice des moments. [HGSB12] analyse la complexité de ce problème quand il est résolu par une méthode de point intérieur à précision donnée. Comme le nombre d'itérations de Newton nécessaire à ces méthodes dépend de manière sous-linéaire de la taille des données du problème, la complexité sera essentiellement dominée par la résolution d'une telle itération. En supposant un coût unitaire par chaque opération arithmétique, [HGSB12] conclut en une estimation de complexité de l'ordre de $O(mr^{4n})$. Même si la complexité croît de manière polynomiale⁸ en fonction de r , on atteint rapidement des temps de calcul prohibitifs en pratique. Il apparaît très clairement qu'une augmentation modérée du nombre de mesures permettant de réduire n est très bénéfique d'un point de vue calculatoire. C'est une des contributions de cette thèse que de procéder de la sorte pour certains problèmes de contrôle optimal, voir les Chapitres 5 et 6.

⁸Nous rappelons que m et n sont des données du problème.

2.4.2 Construction des relaxations

La construction même des relaxations peut être automatisée à partir des données de haut niveau définissant le Problème 2.25 Généralisé des Moments par le logiciel GloptiPoly [HLL09]. Celui-ci permet de définir plusieurs mesures, chacune définie sur son propre espace euclidien, et de les contraindre linéairement entre elles par leurs moments. La construction des contraintes semi-définies et l'interface avec les solveurs semi-définis comme SeDuMi sont gérées de manière interne. La détection de la convergence, ainsi que l'extraction de solutions comme présenté en §2.3.2, est également implémentée.

Remarque 2.41 *L'Exemple 4.14 page 63 montre comment rentrer les données d'un PGM dans GloptiPoly.*

Il est à noter que GloptiPoly utilise la base des monômes (2.4), ordonnée pour chaque mesure par l'ordre lexicographique gradué. Ce choix est en partie motivé par la facilité de manipulation de cette base polynomiale, puisque le produit de deux monômes est aussi un monôme, et le gradient d'un monôme est un vecteur pondéré de monômes. Néanmoins, certaines autres bases polynomiales peuvent être souhaitables en pratique. Dans ce mémoire, nous considérons aussi les polynômes de Tchebychev $T_k(x)$ pour résoudre les problèmes univariés. Cette base est définie par la récursion :

$$T_0(x) = 1 \tag{2.40}$$

$$T_1(x) = x \tag{2.41}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{2.42}$$

[Hen12] reprend l'expression des matrices des moments et des matrices de moments de localisation en $1 - x^2 \geq 0$ exprimées dans cette base. Cette base a de très bonnes propriétés pour le calcul d'interpolations polynomiales de manière efficace [Tre13], ce qui est sa motivation pour son emploi au Chapitre 4.

Certaines considérations numériques sont parfois évoquées pour le choix de bases alternatives. Dans [HLS09], la hiérarchie de relaxations présentée dans ce chapitre est utilisée pour calculer le volume d'ensembles semi-algébriques tels que définis dans l'Hypothèse 2.18. Il est montré que pour ce problème, d'autres bases polynomiales peuvent posséder –d'un point de vue numérique– de meilleures propriétés de convergence asymptotique de la hiérarchie. Ce phénomène est attribué au mauvais conditionnement, défini comme le rapport entre la plus petite et la plus grande valeur singulière, de la matrice des moments de la mesure de Lebesgue dans cette base. Comme c'est précisément cette mesure qui doit être approchée dans le calcul d'un volume, on s'attend à des difficultés numériques lorsque l'ordre de relaxation est tel que le conditionnement de la matrice des moments passe en-dessous de la précision machine.

Néanmoins, ces résultats sont à tempérer pour les problèmes généraux. Par exemple, dans le cas de l'optimisation polynomiale présenté en fin de chapitre, les solutions optimales sont génériquement des mesures de Dirac, pour lesquelles la matrice des moments est singulière dans n'importe quelle base polynomiale. De plus, les ordres de relaxation élevés ne sont en pratique atteignables que pour les problèmes posés sur \mathbb{R} , suite aux considérations exposées en §2.4.1.

2.5 Exemple : optimisation polynomiale

Dans cette section, nous présentons comment résoudre les problèmes d'optimisation polynomiale sous contraintes par l'approche par les moments. Ceci permet d'illustrer la méthode et d'introduire les techniques de preuves pour les résultats similaires des chapitres suivants.

On considère donc le problème d'optimisation suivant :

Problème 2.42 (Optimisation polynomiale)

$$J = \inf_x f(x) \\ \text{t.q. } x \in \mathbf{X}$$

avec les hypothèses :

1. $x \in \mathbb{R}^n$;
2. La fonction coût $f \in \mathbb{R}[x]$;
3. L'ensemble \mathbf{X} respecte l'Hypothèse 2.18 de compacité.

2.5.1 Vers une instance du PGM

Nous considérons à la place le PGM suivant :

Problème 2.43 (Formulation faible sur les mesures)

$$J_M = \inf_{\mu} \langle f, \mu \rangle \\ \text{t.q. } \langle 1, \mu \rangle = 1, \\ \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X}).$$

En effet :

Proposition 2.44

$$J = J_M.$$

Le reste de la section est dédiée à la preuve de ce résultat. La preuve utilisée est moins élémentaire que [Las09], mais utilise le même mécanisme que les preuves similaires aux chapitres suivants. Pour ce faire, nous introduisons le problème intermédiaire suivant :

Problème 2.45 (Problème intermédiaire sur les mesures)

$$J_\eta = \inf_{\eta} \langle f, \eta \rangle$$

$$\text{t.q. } \eta \in \mathbf{H} := \{\eta \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X}) : \eta(dx) = \delta_\xi(dx), \xi \in \mathbf{X}\}$$

Le Problème 2.45 n'est rien d'autre qu'une retranscription de l'ensemble \mathbf{X} comme sous ensemble des mesures de probabilités, puisque bien évidemment

$$\mathbf{H} \subset \mathcal{P}.$$

Comme \mathbf{X} est compact, \mathbf{H} est fermé $*$ -faiblement, ce qui permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.46

$$\overline{\text{conv}} \mathbf{H} = \mathcal{P}.$$

Preuve Ceci est l'application directe d'un corollaire des théorèmes d'Alaoglu et de Krein-Milman, voir par exemple [RF10, Cor 21.13] : \mathbf{X} est compact Hausdorff, \mathbf{H} est un sous-ensemble borné de $\mathcal{M}^+(\mathbf{X})$ qui est $*$ -fermé. Donc \mathbf{H} est $*$ -compact. On montre aussi que [Bar02, Prop. III.8.4] les mesures de Dirac sont les points extrêmes de \mathcal{P} . Comme \mathcal{P} est convexe et $*$ -compact, cet ensemble est la $*$ -fermeture convexe de ses point extrêmes, et donc de \mathbf{H} . ■

Pour terminer la preuve d'équivalence, il suffit de remarquer que minimiser une fonctionnelle linéaire sur un ensemble donné ou sa fermeture convexe donne le même résultat.

2.5.2 Dualité : conditions suffisantes

Les résultats de §2.3.4 donnent directement :

Problème 2.47 (Problème dual associé)

$$P = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \gamma$$

$$\text{t.q. } f(x) - \gamma \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Par le Théorème 2.37, il y a dualité forte et $P = J_M$ si \mathbf{X} n'est pas vide. Le renforcement du Problème 2.47 par les certificats somme de carrés de Putinar donne les conditions suivantes :

Problème 2.48 (Problème dual, certificats de Putinar)

$$\begin{aligned}
P &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \gamma \\
\text{t.q. } & f(x) - \gamma = s_0(x) + \sum_{k \in \mathbf{N}_{\mathbf{X}}} g_k(x) s_k(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}
\end{aligned}$$

Il est montré dans [Nie13] que $f(x) - \gamma$ possède génériquement une décomposition finie en sommes de carrés. Il en découle que la convergence de la hiérarchie ci-dessus pour l'optimisation polynomiale se fait génériquement en un nombre fini de relaxations.

2.5.3 Résumé

La Figure 2.1 synthétise les relations entre les différents problèmes présentés pour l'optimisation polynomiale. La Figure 2.2 traite un exemple élémentaire selon l'approche par les moments. Bien évidemment, comme le problème est posé sur \mathbb{R} , on aurait pu se satisfaire ici de la première relaxation.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous introduisons le Problème Généralisé des Moments (PGM), un problème d'optimisation linéaire sur l'espace des mesures positives. Nous détaillons alors une méthode numérique impliquant une hiérarchie de relaxations semi-définies pour résoudre ce problème. L'approche est appliquée à l'exemple de l'optimisation polynomiale. Le reste de ce mémoire sera consacré aux différentes façons de reformuler ou de relâcher certains problèmes de commande optimale en tant que PGM. Avec une simple adaptation des résultats de ce chapitre, il est alors possible de résoudre chacun de ces problèmes par une hiérarchie de relaxations semi-définies.

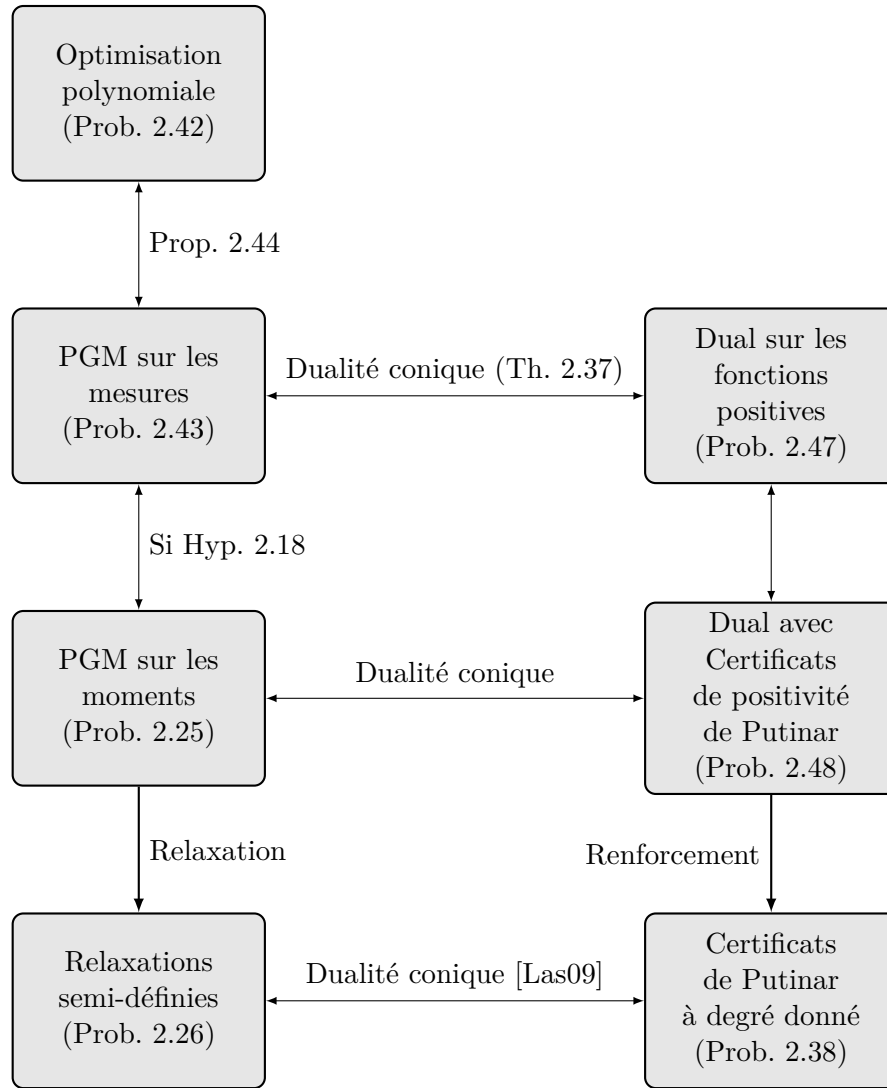


FIGURE 2.1 – Approche par les moments pour l'optimisation polynomiale. Relations entre les différents Problèmes de ce chapitre.

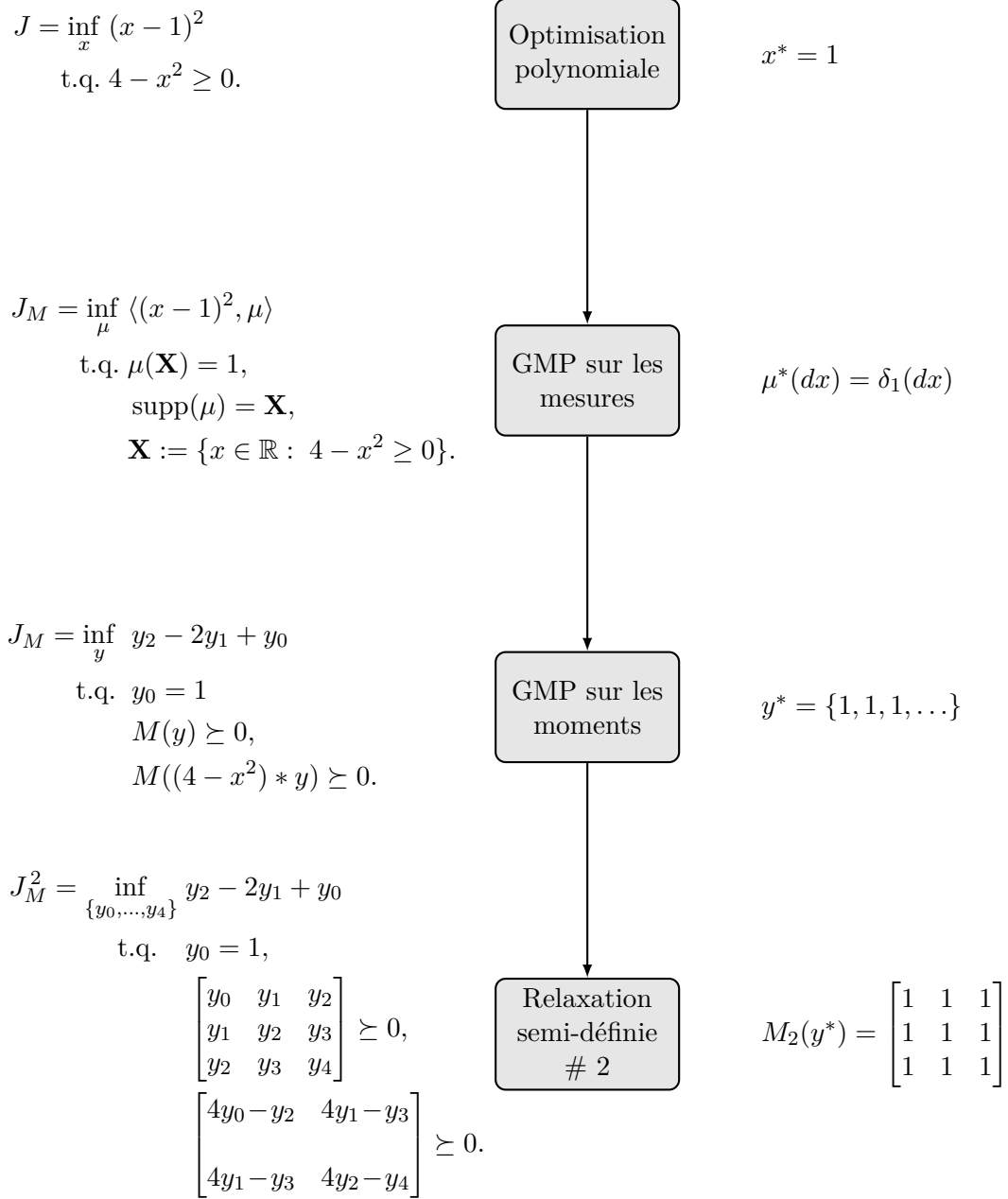


FIGURE 2.2 – L’approche par les moments sur un exemple élémentaire d’optimisation polynomiale. A partir de problème initial, en haut à gauche, on descend les étapes pour obtenir une relaxation. Après résolution numérique, si la solution respecte la proposition 2.30, on retrouve les solutions optimales de chaque étape, à droite.

Chapitre 3

Contrôle mesuré

Sommaire

3.1	Introduction	31
3.2	Présentation du problème	32
3.3	Contrôles généralisés	34
3.4	Vers une instance du PGM	35
3.5	Dualité conique	39
3.6	Sauts de relaxation	42
3.7	Exemples académiques	44
3.8	Conclusion	51

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux problèmes non-linéaires de commande optimale, où le contrôle est borné. Nous avons déjà mentionné en introduction de ce mémoire certaines difficultés à surmonter, et en particulier : la garantie de l'optimalité *globale*, le traitement des *contraintes inégalitaires* et les *phénomènes d'oscillation*. Pour surmonter ces difficultés, nous introduisons les *mesures d'occupation*, qui permettent de linéariser le problème de commande optimale en un Problème Généralisé des Moments (PGM). Si les données du problème sont polynomiales, il pourra être résolu par l'approche par les moments, comme pour le cas de l'optimisation polynomiale présenté en §2.5, selon le schéma de la Figure 3.1.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons essentiellement au passage du problème de commande optimale en sa relaxation comme une instance du PGM, puisqu'une fois que le problème est sous cette forme, la méthode numérique présentée au chapitre 2 est applicable pour sa résolution numérique. Il faut noter que, contrairement au cas de l'optimisation polynomiale présentée en §2.5, il se peut que le passage vers un PGM engendre au saut de relaxation.

Survol du chapitre

La section §3.2 présente le problème de commande optimale traité dans ce chapitre. La section §3.3 introduit un concept de solution généralisée pour ces problèmes, qui permet

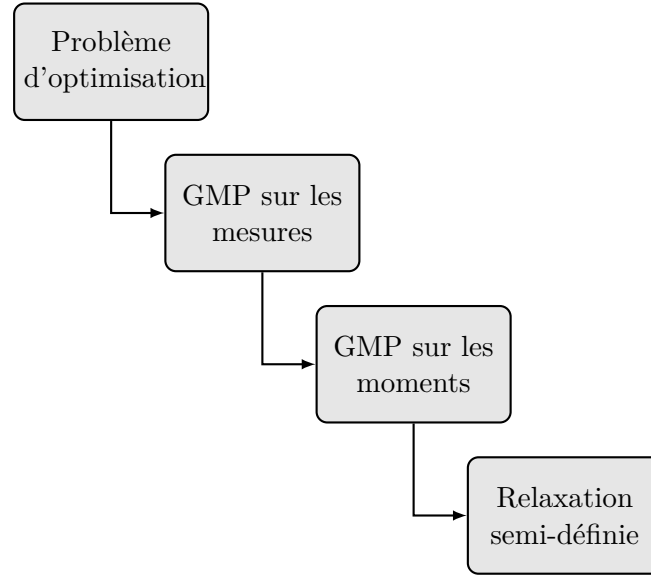


FIGURE 3.1 – L’approche par les moments.

de réécrire naturellement en §3.4 le problème de commande optimale comme un PGM. La section explore le problème dual qu’on peut déduire à partir de PGM. La section §3.6 explore les conditions favorables ou non à l’existence d’un saut de relaxation. Enfin, §3.7 illustre la méthode sur plusieurs exemples académiques.

3.2 Présentation du problème

Ce chapitre présente les résultats de [LHPT08], à la base de cette thèse. On essaye ici de se détacher de l’hypothèse de convexité employée dans l’article afin de mieux étudier la relation entre le problème de commande optimale et sa relaxation en tant que PGM.

Soit donc le problème de contrôle optimal général suivant :

Problème 3.1 (Contrôle optimal non-linéaire)

$$\begin{aligned}
 J = \inf_{a,b,u(\cdot),x(\cdot)} & \int_a^b h(t, x(t), u(t)) dt + h_a(a, x(a)) + h_b(b, x(b)) \\
 \text{t.q.} & \begin{aligned}
 \dot{x} &= f(t, x(t), u(t)) & \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.}, \\
 (a, x(a)) &\in \mathbf{K}_a, \\
 (b, x(b)) &\in \mathbf{K}_b \\
 (t, x(t), u(t)) &\in \mathbf{K} & \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.}, \\
 a &\leq b
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

avec les hypothèses :

- (i) $x(t)$ est un vecteur de n états, chacun dans $AC([a, b])$;

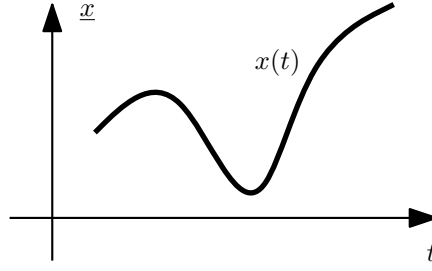


FIGURE 3.2 – Convention de notation

- (ii) $u(t)$ est un vecteur de m contrôles, chacun dans $L_\infty([a, b])$;
- (iii) Les temps initiaux et finaux $a, b \in \mathbb{R}$;
- (iv) Les coûts et la dynamique sont polynomiaux en leurs arguments :
 $h(t, \underline{x}, \underline{u}), f(t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbb{R}[t, \underline{x}, \underline{u}]$ et $h_a(t, \underline{x}), h_b(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]$;
- (v) Les ensembles $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ et \mathbf{K} sont des sous-ensembles de, respectivement, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, respectant l'Hypothèse 2.18 de compacité/représentation. On note par, respectivement, g_i^a, g_i^b et g_i les inégalités semi-algébriques les définissant, les nombres de ces inégalités étant respectivement l_a, l_b et l .

Remarque 3.2 Dans la formulation ci-dessus et dans le reste du mémoire, les trajectoires seront représentées par le symbole $x(t)$, tandis que l'espace d'état sera paramétré par \underline{x} , voir Figure 3.2. Il en va de même pour les fonctions de contrôles $u(t)$ définies sur un espace paramétré par \underline{u} .

Sous ces hypothèses, dynamique et coûts sont continus, et même globalement Lipschitz-continus en toutes leurs variables, puisque trajectoires et contrôles restent confinées dans des compacts sous l'hypothèse (v). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait donc que, pour a et $x(a)$ donnés, chaque $u(t)$ admissible définit une trajectoire unique. On peut donc restreindre les variables de décision du problème d'optimisation à $a, b, x(a)$ et $u(t)$, bien que d'autres combinaisons soient bien sûr possibles.

On reconnaîtra sous les hypothèses (iv) et (v) les conditions essentielles pour appliquer l'approche par les moments, une fois le problème posé comme un problème généralisé des moments, voir chapitre 2. Il est dès lors possible d'obtenir une série de relaxations semi-définies de dimensions finies, dont les coûts convergent vers celui du PGM, voir §2.3.1. Les prochaines sections sont donc consacrées au passage vers le Problème Généralisé des Moments.

Remarque 3.3 Dans tout ce qui précède, nous ne faisons pas d'hypothèse particulière garantissant l'existence de trajectoires admissibles, et une des tâches de la méthode sera d'identifier ces problèmes mal posés. Par exemple, on ne s'imposera pas d'hypothèse d'inclusion des ensembles initiaux et terminaux dans \mathbf{K} , ou de connexité de ce dernier. Les exemples académiques en §3.7 illustrent ces possibilités.

Remarque 3.4 *La formulation précédente évite également les problèmes d'explosion car les trajectoires restent forcément confinées dans des compacts par l'hypothèse (v). C'est un des grands avantages de travailler avec une méthode traitant naturellement les contraintes unilatérales d'états.*

3.3 Contrôles généralisés

Il est montré à la prochaine section que relâcher le Problème 3.1 de commande optimale comme un problème généralisé des moments revient à relâcher les contrôles $u(t) \in L_\infty$, qu'on nomme pour la suite « contrôles ordinaires », par des objets généralisés que nous définissons maintenant.

En se référant à l'Exemple 1.1 en page 3, une manière de se prémunir des effets d'oscillation est de fermer l'espace de recherche en utilisant des objets « généralisés » pour représenter les contrôles. Une manière de procéder de la sorte fut introduite par Young (voir l'exposition dans [You69] ou [Gam78]), où l'on relâche les contrôles $u(t)$ par un ensemble $\{\omega(d\underline{u}|t)\}_t$ de mesures de probabilités, avec $\omega(d\underline{u}|t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ pour presque tout $t \in [a, b]$, tel que $\forall v \in C_c(\mathbb{R}^m)$, la fonction $t \mapsto \int v(\underline{u}) d\omega(\underline{u}|t)$ est Lebesgue mesurable.

Remarque 3.5 *La notation $\omega(d\underline{u}|t)$ identifie bien ces mesures comme des mesures conditionnelles, aussi connues sous le nom de noyaux stochastiques, puisque la condition de mesurabilité implique l'existence d'une mesure*

$$\nu(dt, d\underline{u}) := \omega(d\underline{u}|t) \lambda(dt), \quad (3.1)$$

voir [BS79].

Bien évidemment, tout contrôle ordinaire $u(t)$ peut être plongé dans un tel espace par la mesure de Dirac, puisque

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta_{u(t)}(d\underline{u}). \quad (3.2)$$

Avec ces contrôles généralisés, l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.3)$$

se relâche sur l'intervalle temporel $[a, b]$ par

$$\dot{x} = \int_{\mathbf{U}(t)} f(t, x(t), \underline{u}) \omega(d\underline{u}|t), \quad \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.} \quad (3.4)$$

Ceci permet de définir pour l'Exemple 1.1 un concept de solution approprié en terme de mesures. On peut en effet définir comme solution

$$\omega(d\underline{u}|t) = \frac{1}{2} \delta_1(d\underline{u}) + \frac{1}{2} \delta_{-1}(d\underline{u}) \quad \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.} \quad (3.5)$$

de telle sorte que $x(t) = 0$ p.p. car

$$dx(t) = \int_{\mathbb{R}} \underline{u} \omega(d\underline{u}|t) dt = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) dt = 0 \quad (3.6)$$

et

$$J = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left((1 - \underline{u}^2)^2 + x^2(t) \right) \omega(d\underline{u}|t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(0+0) + 0 \right) dt = 0. \quad (3.7)$$

La relaxation de (3.3) par (3.4) revient à convexifier la dynamique. En effet, soit l'ensemble des vecteurs vitesse

$$\mathbf{V}(t, \underline{x}) := \{f(t, \underline{x}, \underline{u}) : (t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbf{K}\} \quad (3.8)$$

où \mathbf{V} est compact selon les hypothèses sur \mathbf{K} , et sa version relâchée

$$\tilde{\mathbf{V}}(t, \underline{x}) := \{\langle f(t, \underline{x}, \underline{u}), \omega(d\underline{u}|t, \underline{x}) \rangle : (t, \underline{x}, \text{supp } \omega) \in \mathbf{K}\} = \text{conv } \mathbf{V}(t, \underline{x}). \quad (3.9)$$

Tout point de $\tilde{\mathbf{V}}$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de ses points extrêmes, qui sont un sous-ensemble de \mathbf{V} , en choisissant la combinaison convexe de mesures de Dirac supportées en ces points. L'intérêt de convexifier le champ de vecteurs provient du théorème suivant, qui sera utilisé à la section suivante :

Théorème 3.6 (Fermeture des trajectoires pour les dynamiques convexes)

Soit l'ensemble des vecteurs vitesse de la dynamique du Problème 3.1 compact et convexe pour tout t et \underline{x} . Alors, l'ensemble des trajectoires est fermé dans $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

La preuve de ce théorème est présentée, dans le contexte plus large des inclusions différentielles, dans [BP07, Th. 3.3.1].

3.4 Vers une instance du PGM

Grâce à l'introduction des contrôles généralisés, il est maintenant possible de relâcher le Problème 3.1 de commande optimale comme un problème généralisé des moments posé sur un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, et ainsi d'exploiter les résultats du chapitre 2 pour sa résolution.

En effet, le relâchement convexe du Problème 3.1 par les contrôles généralisés s'écrit :

Problème 3.7 (Contrôle optimal non-linéaire convexifié)

$$\begin{aligned} J_C &= \inf \int_a^b \int_{\mathbb{R}^m} h(t, x(t), \underline{u}) \omega(d\underline{u}|t) dt + h_a(a, x(a)) + h_b(b, x(b)) \\ \text{t.q. } \dot{x} &= \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x(t), \underline{u}) \omega(d\underline{u}|t) & \lambda_{[a,b]} - \text{p.p.}, \\ (a, x(a)) &\in \mathbf{K}_a, \\ (b, x(b)) &\in \mathbf{K}_b, \\ (t, x(t), \text{supp}(\omega(d\underline{u}|t))) &\in \mathbf{K} & \lambda_{[a,b]} - \text{p.p.}, \\ a &\leq b \end{aligned}$$

où :

1. toutes les hypothèses du Problème 3.1 tiennent ;
2. $\omega(d\underline{u}|t)$ est un contrôle généralisé comme défini en §3.3.

Dans cette section, nous allons montrer l'équivalence de ce problème relâché avec le problème généralisé des moments suivant :

Problème 3.8 (Formulation PGM)

$$\begin{aligned}
 J_M = \inf_{\mu, \mu_a, \mu_b} \quad & \langle h, \mu \rangle + \langle h_a, \mu_a \rangle + \langle h_b, \mu_b \rangle \\
 \text{t.q.} \quad & \langle v, \mu_b \rangle - \langle v, \mu_a \rangle = \langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \cdot f, \mu \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}], \\
 & \langle 1, \mu_a \rangle = \langle 1, \mu_b \rangle = 1, \\
 & \mu_a \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_a), \\
 & \mu_b \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_b), \\
 & \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}).
 \end{aligned}$$

On remarque certaines similarités avec le PGM associé aux problèmes d'optimisation polynomiale ; le coût est relâché en une simple évaluation de fonctionnelles linéaires, et certaines des mesures sont restreintes à être des mesures de probabilité sur leurs supports respectifs. La différence essentielle, outre le fait que plusieurs mesures interviennent, provient de la contrainte à respecter pour toute fonction test v polynomiale, qui encode la dynamique. Contrairement aux problèmes d'optimisation polynomiale, on a bien ici un ensemble dénombrable mais infini-dimensionnel de contraintes égalités. Ceci traduit dans un certain sens le caractère infini-dimensionnel du problème de contrôle optimal en général.

Remarque 3.9 Dans le Problème 3.8, on considère par anticipation uniquement les fonctions test v polynomiales. Le problème étant posé sur des ensembles compacts d'espaces euclidiens, se limiter à une telle base dense des fonctions continues est justifié.

Remarque 3.10 Dans le Problème 3.8, le point initial $(a, x(a))$ et/ou final $(b, x(b))$ est souvent une donnée du problème. On a alors bien évidemment $\mu_a(d(t, \underline{x})) = \delta_a(dt) \times \delta_{x(a)}(d\underline{x})$ et $\mu_b(d(t, \underline{x})) = \delta_b(dt) \times \delta_{x(b)}(d\underline{x})$, de sorte que le PGM se réduit à :

$$\begin{aligned}
 J_M = \inf_{\mu} \quad & \langle h, \mu \rangle \\
 \text{t.q.} \quad & v(b, x(b)) - v(a, x(a)) = \langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \cdot f, \mu \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}] \\
 & \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'intérêt d'introduire le Problème 3.8 est donc le suivant :

Théorème 3.11 [Lewis et Vinter [LV80]]

$$J_M = J_C. \tag{3.11}$$

Nous montrons maintenant les idées directrices derrière ce théorème, en introduisant le concept essentiel de *mesures d'occupation*. Le cas de l'applicabilité de l'égalité $J = J_M$ est quant à lui déferé en §3.6 car plus délicat à traiter.

Soit une trajectoire admissible pour le Problème 3.8 définie par les paramètres

$$p := \{a, b, \omega, x(t)\}. \tag{3.12}$$

On définit alors :

Définition 3.12 (Mesure d'occupation de l'état initial) *La mesure d'occupation de l'état initial $\mu_a[p](d(t, \underline{x})) \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_a)$ est définie par :*

$$\mu_a[p] := \delta_{(a, x(a))}. \quad (3.13)$$

Remarque 3.13 *Par la suite, on notera simplement μ_a au lieu de $\mu_a[p]$ si cela n'introduit pas d'ambiguïté.*

On peut l'interpréter comme une mesure donnant la probabilité sur \mathbf{K}_a d'y trouver le point initial de la trajectoire. Bien évidemment, cette probabilité est de 1 si le sous-ensemble de Borel contient le point initial $(a, x(a))$ et de zéro sinon. C'est la même interprétation donnée aux mesures apparaissant dans l'optimisation polynomiale, voir §2.5. On a donc la propriété suivante, pour toute fonction test $v(t, \underline{x}) \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$:

$$\langle v(t, \underline{x}), \mu_a \rangle = v(a, x(a)). \quad (3.14)$$

Définition 3.14 (Mesure d'occupation de l'état final) *On définit la mesure d'occupation de l'état final $\mu_b[p](d(t, \underline{x})) \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_b)$ de manière similaire par :*

$$\mu_b := \delta_{(b, x(b))}. \quad (3.15)$$

L'interprétation de cette mesure est analogue à celle de $\mu_a[p]$, et pour les mêmes fonctions-tests v :

$$\langle v(t, \underline{x}), \mu_b[p] \rangle = v(b, x(b)). \quad (3.16)$$

Définition 3.15 (Mesure d'occupation de l'état et du contrôle) *La mesure d'occupation $\mu[p](dt \times d\underline{x} \times d\underline{u}) \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K})$ par la trajectoire $x(t)$ est définie par :*

$$\mu(dt \times d\underline{x} \times d\underline{u}) := \delta_{x(t)}(d\underline{x}|t) \times \omega(d\underline{u}|t) \times \lambda_{[a,b]}(dt). \quad (3.17)$$

L'interprétation se fait comme suit, et justifie son nom. Si l'on projette la mesure sur le temps et l'espace d'état, la mesure d'occupation de l'état et du contrôle mesure le temps que passe la trajectoire dans tout sous-ensemble de Borel de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ quelque soit le contrôle. Par exemple, pour la trajectoire et les ensembles \mathbf{A} et \mathbf{B} définis à la Figure 3.3 :

$$\mu(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbb{R}^m) = t_4 - t_3 + t_2 - t_1. \quad (3.18)$$

Pour un contrôle ordinaire, c'est-à-dire si $\omega(d\underline{u}|t) = \delta_{u(t)}(d\underline{u})$, l'interprétation est analogue. Pour les contrôles relâchés, nous renvoyons à l'interprétation donnée à la section §3.3. Par construction, on a pour toute fonction $v(t, \underline{x}, \underline{u}) \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ la propriété :

$$\langle v(t, \underline{x}, \underline{u}), \mu(d(t, \underline{x}, \underline{u})) \rangle = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^m} v(t, x(t), \underline{u}) \omega(d\underline{u}|t) dt. \quad (3.19)$$

Les propriétés (3.14), (3.16) et (3.19) permettent de passer d'un problème différentiel, avec le temps comme variable indépendante, à un problème d'intégration spatiale sur les mesures d'occupation. Pour ce faire, on va tester les mesures μ_a et μ_b par toutes

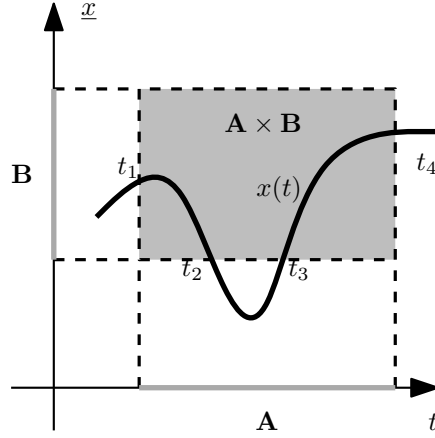


FIGURE 3.3 – Illustration des mesures d'occupation

les fonctions tests $v(t, \underline{x}) \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On a alors, le long de la trajectoire admissible paramétrée par p :

$$\begin{aligned} \int_a^b dv(t, x(t)) &= v(b, x(b)) - v(a, x(a)) \\ &= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, x(t)) \int f(t, x(t), \underline{u}) \omega(d\underline{u}|t) \right)}_{:= F(t)} dt. \end{aligned}$$

En substituant les définitions (3.13), (3.15) et (3.17) dans cette dernière, l'intégration temporelle précédente se réduit à une intégration spatiale :

$$\int v(t, \underline{x}) d\mu_b - \int v(t, \underline{x}) d\mu_a = \int \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, \underline{x}) + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, \underline{x}) f(t, \underline{x}, \underline{u}) \right)}_{:= \tilde{F}(t, \underline{x}, \underline{u})} d\mu. \quad (3.20)$$

On peut donc réécrire le Problème 3.7 convexifié de manière équivalente par :

Problème 3.16 (Problème sur les mesures d'occupation)

$$J_C = \inf_p \langle h, \mu[p] \rangle + \langle h_a, \mu_a[p] \rangle + \langle h_b, \mu_b[p] \rangle$$

tel que (3.20) soit satisfait.

Le Théorème 3.11 démontre par analyse convexe [LV80] que la fermeture de l'enveloppe convexe des solutions admissibles de 3.16 est donnée par l'ensemble des solutions admissibles de 3.8. Ceci permet une interprétation intéressante des mesures μ_a , μ_b et μ , par le corollaire suivant [Vin93, Corollaire 1.4] :

Corollaire 3.17 (Interprétation probabiliste du PGM) *On peut associer à chaque triplet $\{\mu_a, \mu_b, \mu\}$ admissible pour le Problème 3.8 une mesure de probabilité $\eta(ds)$ sur les Boréliens (générés par la topologie $*$ -faible) de l'ensemble des mesures d'occupation*

$$S := \{\{\mu_a[p], \mu_b[p], \mu[p]\} : (3.20) \text{ est satisfait}\}. \quad (3.21)$$

Tout triplet $\{\mu_a, \mu_b, \mu\}$ peut donc être décomposé en une combinaison¹ convexe de mesures d'occupation $\{\mu_a^i[p], \mu_b^i[p], \mu^i[p]\}$, de la même manière que pour l'optimisation polynomiale, toute solution faible peut être décomposée en une combinaison convexe de mesures de Dirac localisées aux points optimaux.

3.5 Dualité conique

En inspectant les données du Problème 3.8, on remarque directement qu'elles satisfont l'Hypothèse 2.40, de sorte que :

Proposition 3.18 *Si le Problème 3.8 possède une solution admissible, alors il existe une solution optimale $\{\mu_a^*, \mu_b^*, \mu^*\}$ atteignant l'infimum du problème.*

Preuve *Il suffit donc selon l'Hypothèse 2.40 de trouver un $a_i > 0$ pour chaque mesure contraignant les moments de chacune d'elles par*

$$\langle a_i, \mu_i \rangle = b_i. \quad (3.22)$$

Comme μ_a et μ_b sont des mesures de probabilité, elles satisfont cette condition trivialement ($a_i = 1$). Pour μ , on peut choisir la fonction test $v(t, \underline{x}) = t$ dans la dynamique faible qui impose $\langle 1, \mu \rangle \leq \max b - \min a < \infty$. ■

La solution du PGM étant atteinte, on peut donc souhaiter écrire un problème dual et en déduire des conditions suffisantes par complémentarité. On remarque qu'on peut mettre le Problème 3.8 sous la forme d'un problème primal sous forme canonique de dualité conique, comme rappelé en §2.3.3, grâce aux définitions suivantes :

- La variable de décision x_p du primal conique est un vecteur de mesures

$$x_p := \begin{bmatrix} \mu & \mu_a & \mu_b \end{bmatrix} \in E_p \quad (3.23)$$

avec

$$E_p := \mathcal{M}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}(\mathbf{K}_a) \times \mathcal{M}(\mathbf{K}_b), \quad (3.24)$$

munies de la topologie $*$ -faible ;

- Le coût est donné par

$$c := \begin{bmatrix} h & h_a & h_b \end{bmatrix} \in F_p \quad (3.25)$$

avec

$$F_p := C(\mathbf{K}) \times C(\mathbf{K}_a) \times C(\mathbf{K}_b), \quad (3.26)$$

où les polynômes sont ici vus comme un sous ensemble des fonctions continues ;

¹On prend ici le terme combinaison dans son acceptation large, donc éventuellement non-dénombrable.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times F_p \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bien une paire duale définie par l'intégration de fonctions continues par les mesures ;

- Le cône \mathbf{V} est donc celui des mesures positives

$$\mathbf{V} := \mathcal{M}^+(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_a) \times \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_b), \quad (3.27)$$

et \mathbf{V}^* est celui des fonctions positives

$$\mathbf{V}^* := C_+(\mathbf{K}) \times C_+(\mathbf{K}_a) \times C_+(\mathbf{K}_b); \quad (3.28)$$

- On choisit un ensemble compact $\tilde{\mathbf{K}}$ dont \mathbf{K}_a , \mathbf{K}_b et $\{(t, \underline{x}) : (t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbf{K}\}$ sont des sous-ensembles ;
- Le vecteur de contraintes b se définit par :

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in E_d \quad (3.29)$$

avec

$$E_d := [C_1(\tilde{\mathbf{K}})]^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (3.30)$$

- On définit l'opérateur $\mathcal{L}^* : C_1(\tilde{\mathbf{K}}) \rightarrow F_p$ défini par

$$w \mapsto \mathcal{L}^* w := \left[-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} f, -w, w \right] \quad (3.31)$$

et son opérateur adjoint $\mathcal{L} : E_p \rightarrow [C_1(\tilde{\mathbf{K}})]^*$ défini par

$$\langle \mathcal{L}^* w, x_p \rangle = \langle w, \mathcal{L} x_p \rangle; \quad (3.32)$$

- On définit alors l'opérateur $\mathcal{A} : E_p \rightarrow E_d$ par

$$x_p \mapsto \mathcal{A} x_p := \begin{pmatrix} \mathcal{L} x_p \\ \langle [0 \ 1 \ 0], x_p \rangle \\ \langle [0 \ 0 \ 1], x_p \rangle \end{pmatrix}; \quad (3.33)$$

- La variable de décision x_d du dual conique est un vecteur

$$x_d := \begin{bmatrix} w & \gamma_a & \gamma_b \end{bmatrix} \in F_p \quad (3.34)$$

avec

$$F_p := C_1(\tilde{\mathbf{K}}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (3.35)$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_d : E_d \times F_d \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bien une paire duale entre E_d et F_d ;

Le Problème 3.8 s'écrit synthétiquement, voir §2.3.3, par :

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{x_p} \langle x_p, c \rangle_p \\ \text{t.q. } &\mathcal{A}x_p = b, \\ &x_p \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

et son dual conique associé est

$$\begin{aligned} D &= \sup_{x_d} \langle b, x_d \rangle_d \\ \text{t.q. } &c - \mathcal{A}^*x_d \in \mathbf{V}^* \\ &x_d \in E_d. \end{aligned} \quad (3.37)$$

De manière détaillée, on obtient le :

Problème 3.19 (Problème dual associé)

$$\begin{aligned} D &= \sup_{w, \gamma_a, \gamma_b} \gamma_a + \gamma_b \\ \text{t.q. } &h + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} f \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbf{K}, \\ &h_a(t, \underline{x}) + w(t, \underline{x}) - \gamma_a \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}_a, \\ &h_b(t, \underline{x}) - w(t, \underline{x}) - \gamma_b \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}_b, \\ &(\gamma_a, \gamma_b) \in \mathbb{R}^2, \\ &w(t, \underline{x}) \in C_1(\tilde{\mathbf{K}}). \end{aligned}$$

Proposition 3.20 *Supposons qu'il existe un vecteur de mesures admissibles pour le Problème 3.8. Alors, il n'y a pas de saut de dualité, soit*

$$D = J_M. \quad (3.38)$$

Preuve Selon le Théorème 2.35, il faut donc prouver la fermeture dans $\mathbb{R} \times E_d$ de

$$\mathbf{R} := \{(\langle x_p, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p) : x_p \in \mathbf{V}\}. \quad (3.39)$$

Pour démontrer la fermeture de \mathbf{R} , on peut par exemple montrer que tous les points d'accumulation de $(\langle x_p^{(n)}, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p^{(n)})$ pour une suite quelconque de $x_p^{(n)}$ appartiennent à \mathbf{R} .

On remarque d'abord que toute suite $x_p^{(n)}$ est bornée selon les mêmes arguments que la preuve de la proposition 3.18. Toute suite $x_p^{(n)}$ a une sous-suite convergente, les mesures étant supportées sur des ensembles compacts.

L'opérateur \mathcal{L} est continu pour la topologie forte de $C_1(\tilde{\mathbf{K}})$ et $C(\mathbf{K}) \times C(\mathbf{K}_a) \times C(\mathbf{K}_b)$, ainsi que ses topologies faibles associées, voir [LHPT08, Rem. 2.1]. L'opérateur \mathcal{A} est donc *-faiblement continu, et le point d'accumulation $(\langle x_p^{(n)}, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p^{(n)})$ converge donc dans $\mathbb{R} \times E_d$ à une sous-suite près. ■

La relation entre les solutions admissibles du Problème 3.19 avec l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se fait de manière aisée. Considérons un problème où $h_a = 0$ et le point initial est fixé. On rajoute donc au Problème 3.8 généralisé des moments la contrainte $\mu_a = \delta_{a,x(a)}$, a et $x(a)$ donnés, soit faiblement :

$$\langle v, \mu_a \rangle = \langle v, \delta_{a,x(a)} \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]. \quad (3.40)$$

Le problème dual s'écrit alors

$$\begin{aligned} P = \sup_{\gamma_a, \gamma_b, w, \phi} \quad & \gamma_a + \gamma_b + \phi(a, x(a)) \\ \text{t.q.} \quad & w(a, x(a)) - \gamma_a - \phi(a, x(a)) \geq 0, \\ & h_b(t, \underline{x}) - w(t, \underline{x}) - \gamma_b \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}_b, \\ & h(t, \underline{x}, \underline{u}) + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} \cdot f(t, \underline{x}, \underline{u}) \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbf{K}, \\ & \phi(t, \underline{x}) \in C_1(\mathbf{K}_a). \end{aligned} \quad (3.41)$$

En définissant la fonction valeur $V(t, \underline{x}) := w(t, \underline{x}) + \gamma_b$, on retombe sur

$$\begin{aligned} P = \sup_V \quad & V(a, x(a)) \\ \text{t.q.} \quad & h_b(t, \underline{x}) - V(t, \underline{x}) \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}_b, \\ & h(t, \underline{x}, \underline{u}) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \cdot f(t, \underline{x}, \underline{u}) \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}, \underline{u}) \in \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

On interprète donc [Las09, §10.2] une solution admissible pour le Problème 3.19 comme une sous-solution d'HJB, voir aussi [LHPT08].

Même si il existe une solution optimale x_p^* du coté primal, le suprémum du Problème 3.19 n'est pas nécessairement atteint. Ceci est d'autant plus vrai que seuls les w polynomiaux sont implicitement considérés quand le problème 3.8 est résolu par la hiérarchie de relaxations présentée en §2.3.1. Nous rappelons que se limiter aux polynômes ne pose néanmoins pas de problèmes techniques additionnels puisque il est possible d'approcher simultanément une fonction C_1 et ses dérivées uniformément par un polynôme sur un ensemble compact [Hir76]. On garantit donc par complémentarité l'existence d'une suite $x_d^{(n)}$ telle que

$$\langle x_p^*, c - \mathcal{A}^* x_d^{(n)} \rangle_p \rightarrow 0 \quad (3.43)$$

sur le support de x_p^* , c'est-à-dire le long des trajectoires optimales.

On reconnaît ici le lien avec les conditions suffisantes parfois appelées *théorèmes de vérification* (voir par exemple [FR75]). Dans ce type de conditions, l'optimalité globale d'une solution candidate primale x_p , sous la forme d'une mesure d'occupation ou d'un couple $(u(t), x(t))$, est vérifiée grâce à une suite de fonctions $w_n \in C_1$. Si chacune de ces fonctions est une sous-solution d'Hamilton-Jacobi-Bellman et que le coût de la suite tend vers celui de la solution candidate, alors la solution candidate peut être certifiée optimale, voir aussi [Vin93, Th. 2.2].

3.6 Sauts de relaxation

Jusqu'à présent, nous avons étudié les relations entre le Problème 3.1 de commande optimale, sa convexification sous la forme du Problème 3.7 et sa formulation comme le

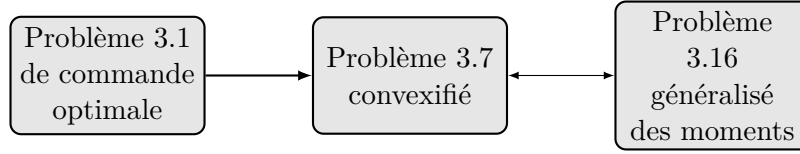


FIGURE 3.4 – Saut de relaxation.

Problème 3.16 généralisé sur les moments, comme présenté à la Figure 3.4. Ces deux derniers sont équivalents, mais il reste la possibilité que le coût sur le problème convexifié soit strictement inférieur à celui du problème de contrôle optimal original.

Nous commençons par un corollaire du Théorème 3.6, qui montre qu’il ne peut y avoir de saut de relaxation lorsque le problème initial est déjà convexe.

Corollaire 3.21 *Si pour le Problème 3.1 de contrôle optimal, l’ensemble des vecteurs vitesse (3.8) est convexe² pour tout t et \underline{x} , alors le Problème 3.16 généralisé des moments est équivalent à celui-ci.*

Preuve *L’ensemble des trajectoires du système étant fermé, l’ensemble des mesures d’occupation associées est donc $*$ -faiblement compact, et on peut donc directement utiliser la preuve de la Proposition 3.16.* ■

Remarque 3.22 *Une autre preuve de cette proposition peut se trouver en [LHPT08, Théorème 3.6 (ii)], où coût et dynamique sont différenciés pour obtenir un résultat légèrement plus général valant aussi pour les coûts semi-continus inférieurement. Vu l’hypothèse de données polynomiales pour le problème de contrôle optimal, cette généralisation n’est pas nécessaire dans le cadre de ce mémoire.*

Le cas convexe couvre une partie importante des systèmes dynamiques communément rencontrés dans les applications. On pourrait néanmoins souhaiter pouvoir exploiter les non linéarités du problème dans leurs pleines généralités. Au vu du théorème de Filippov–Ważewski (voir par exemple le traitement dans [BP07, §3.4]), qui montre que les trajectoires du système non-convexifié sont denses dans celles de son pendant convexe, on peut légitimement s’attendre à ce qu’un saut de relaxation ne peut se produire que lors de cas hautement non-génériques.

Une condition alors souvent invoquée est celle du *vecteur pointant à l’intérieur*³ voir par exemple [FR00] ou la discussion de l’hypothèse I dans [GQ09]. Néanmoins, ces conditions sont difficilement applicables « en boîte noire » à notre méthode. En effet :

- Pour un problème arbitraire donné, il est à notre connaissance difficile de vérifier si ces conditions sont satisfaites ;
- L’exemple soulevé dans [BBV10] pour les domaines fermés définis par plusieurs inégalités (comme c’est le cas pour l’Hypothèse 2.18 de compacité/représentation) complique fortement l’analyse (voir [FT13] par exemple) ;

²On inclut à nouveau le coût intégral dans la dynamique si celui-ci dépend de $u(t)$

³Anglais : « inward pointing condition ».

- Pour les problèmes contraints aux deux bouts, comme c'est le cas dans ce chapitre, ces conditions s'appliquent en faisant implicitement l'hypothèse que le point final optimal se trouve à l'intérieur de l'ensemble accessible. On peut par contreexemple prendre la cas de la voiture de Reed-Shepp, qui en présence d'obstacles, possède un ensemble accessible non fermé [Des96], tout en ayant la possibilité de se mouvoir dans l'intérieur du domaine posé. En mettant le point final sur la frontière de l'ensemble accessible, le problème sur les contrôles ordinaires n'a pas de solution, mais sa relaxation convexe en a bien une. Cet exemple illustre que le développement de conditions garantissant l'absence de saut de relaxation requiert de considérer l'ensemble accessible du problème, et donc de résoudre le problème en pratique.

Question ouverte 3.23 *Peut-on pour les problèmes polynomiaux traités dans ce chapitre détecter à priori ou à posteriori les sauts de relaxation ?*

3.7 Exemples académiques

Cette section illustre la méthode proposée dans ce chapitre par quelques exemples académiques. A part le premier exemple purement tutoriel, chacun des autres exemples illustre certaines propriétés particulières de la méthode (certificats d'infaisabilité, sauts de relaxation, solutions multiples) et dissipent certains malentendus sur celle-ci. Les exemples d'applications non-triviales sont quant à eux déferés au chapitre 6 afin de comparer les différentes approches proposées dans ce mémoire.

L'exemple suivant illustre la construction des relaxations semi-définies pour un exemple simple.

Exemple 3.24 (Simple intégrateur) Soit le problème :

$$V = \inf_{u(t)} \int_0^2 x^2(t) dt \quad (3.44)$$

tel que

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (3.45)$$

$$x(0) = 1, \quad x(2) = \frac{1}{2}, \quad (3.46)$$

$$x^2(t) \leq 1, \quad u^2(t) \leq 1. \quad (3.47)$$

On montre facilement que la solution optimale est

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t \leq 1, \\ 1 & \text{if } t \geq \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.48)$$

pour un coût de $\frac{3}{64} \approx 0.0469$.

En injectant les données du problème $h = \underline{x}^2$ et $f = \underline{u}$ dans le Problème 3.8 généralisé des moments, et en utilisant le fait que pour ce problème contraint aux deux bouts $\mu_a = \delta_0(dt) \times \delta_1(d\underline{x})$ et $\mu_b = \delta_2(dt) \times \delta_{\frac{1}{2}}(d\underline{x})$, le problème associé sur les mesures s'écrit :

$$V_M = \inf_{\mu} \langle \underline{x}^2, \mu \rangle \quad (3.49)$$

tel que, $\forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]$,

$$v(2, \frac{1}{2}) - v(0, 1) = \langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \underline{u}, \mu \rangle, \quad (3.50)$$

$$\mu \in \mathcal{M}^+, \quad (3.51)$$

$$\text{supp } \mu \subset \mathbf{K}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{K} := \left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{u} \in \mathbb{R}^m : t(2 - t) \geq 0 \\ 1 - \underline{x}^2 \geq 0 \\ 1 - \underline{u}^2 \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (3.53)$$

La première équation définissant \mathbf{K} est une des caractérisations semi-algébriques possibles de $t \in [0, 2]$.

Nous considérons maintenant la construction de la première relaxation semi-définie de (3.49)–(3.53), en définissant l'indexation des moments par

$$y_{ijk} := \langle t^i \underline{x}^j \underline{u}^k, \mu \rangle \quad i, j, k \in \mathbb{N}. \quad (3.54)$$

Cette relaxation a comme variable de décision les moments y_{ijk} tels que $i + j + k \leq 2$, puisque le coût (3.49) et les contraintes (3.53) sont quadratiques. Étant donné (3.54), le coût (3.49) se réécrit simplement par :

$$J_M^1 = \inf \langle \underline{x}^2, \mu \rangle = \inf y_{020}. \quad (3.55)$$

Pour la dynamique faible (3.45), il suffit de considérer les fonctions-tests de la forme $v(t, \underline{x}) = t^i \underline{x}^j$, avec $i + j \leq 2$. Par exemple, pour la cinquième fonction-test dans l'ordre lexicographique gradué $v_5 = t\underline{x}$, (3.50) se réduit à

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 1 = \langle \underline{x} + t\underline{u}, \mu \rangle \quad (3.56)$$

et donc à la contrainte sur les moments

$$1 = y_{010} + y_{101}. \quad (3.57)$$

On obtient ainsi pour toutes ces fonctions-tests de degré inférieur ou égal à 2 les contraintes suivantes :

$$2 - 0 = y_{000} \quad [v(t, \underline{x}) = t], \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{2} - 1 = y_{001} \quad [v(t, \underline{x}) = \underline{x}], \quad (3.59)$$

$$4 - 0 = 2y_{100} \quad [v(t, \underline{x}) = t^2], \quad (3.60)$$

$$1 - 0 = y_{010} + y_{101} \quad [v(t, \underline{x}) = t\underline{x}], \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{4} - 1 = 2y_{011} \quad [v(t, \underline{x}) = \underline{x}^2]. \quad (3.62)$$

Enfin, les contraintes de représentativité pour la suite de moments tronquée associée à μ sont les suivantes. La matrice des moments $M_1(y)$, dont les lignes et colonnes sont

	Commande optimale (Prob. 3.1)	GMP (Prob. 3.8)	Relaxation 1 (Prob. 2.26)
Variables de décision	$x(t), u(t)$	μ	$\{y_{ijk}\} : i + j + k \leq 2$
Coût	(3.44)	(3.49)	(3.55)
Dynamique	(3.45)–(3.46)	(3.50)	(3.58)–(3.62)
Contraintes	(3.47), $t \in [0, 2]$	(3.52)–(3.53)	(3.64)–(3.66)
Représentativité	N.A.	(3.51)	(3.63)

TABLE 3.1 – Correspondance des éléments entre les Problèmes 3.1, 3.8 et la première relaxation du Problème 2.26

indexées par les multi-indices $\{000, 100, 010, 001\}$, sont construites à partir de la définition (2.9) pour donner les contraintes semi-définies suivantes :

$$\begin{bmatrix} y_{000} & y_{100} & y_{010} & y_{001} \\ y_{100} & y_{200} & y_{110} & y_{101} \\ y_{010} & y_{110} & y_{020} & y_{011} \\ y_{001} & y_{101} & y_{011} & y_{002} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.63)$$

Les matrices de localisation $M_0(g_i * y)$ associées à chaque contrainte g_i définissant l'ensemble (3.53) sont de simples scalaires à la première relaxation. En utilisant la définition (2.11), on obtient la contrainte de positivité que chacune engendre :

$$M_0(t(2-t) * y)[000, 000] = 2y_{100} - y_{020} \geq 0. \quad (3.64)$$

pour la contrainte $t(2-t) \geq 0$, et de manière analogue pour $1 - \underline{x}^2 \geq 0$ et $1 - \underline{u}^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} M_0((1 - \underline{x}^2)y)[000, 000] &= \ell_y((1 - \underline{x}^2)t^0 \underline{x}^0 \underline{u}^0) \\ &= y_{000} - y_{020} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} M_0((1 - \underline{u}^2)y)[000, 000] &= \ell_y((1 - \underline{u}^2)t^0 \underline{x}^0 \underline{u}^0) \\ &= y_{000} - y_{002} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

La Table 3.1 reprend la correspondance entre les éléments de chaque problème pour cet exemple. En résolvant le problème numériquement, on obtient les bornes inférieures sur le coût de la Table 3.2. A la troisième relaxation, on obtient bien le coût optimal à trois chiffres significatifs.

Le deuxième exemple présente un problème de contrôle où \mathbf{K} n'est pas connexe. La méthode permet bien de détecter l'infaisabilité du problème.

Exemple 3.25 (Domaine non connexe (1)) Soit le problème

$$\begin{aligned} J &= \inf \int_0^1 x^2 dt \\ \text{t.q. } \dot{x} &= u, \\ x(0) &= 1, \quad x(1) = -1, \\ (1+x)(-\tfrac{1}{2}-x)(\tfrac{1}{2}-x)(1-x) &\geq 0, \\ u^2 &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.67)$$

r	J_r
1	0.0461
2	0.0468
3	0.0469

TABLE 3.2 – Bornes inférieures sur le coût en fonction de l'ordre de relaxation r pour l'Exemple 3.24

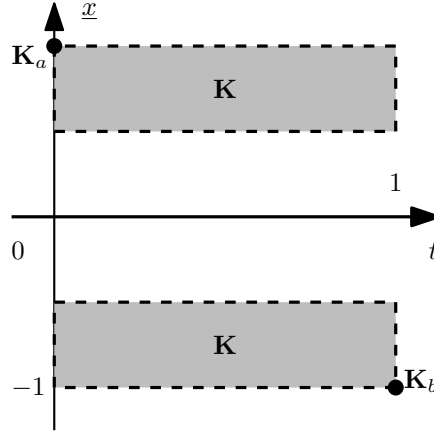


FIGURE 3.5 – Domaine non-connexe pour l'Exemple 3.25.

La projection sur $t \times \underline{x}$ de \mathbf{K} est présentée à la Figure 3.5, ainsi que le point initial et final. L'ensemble est donc non connexe. Dès la première relaxation (d'ordre 2), les relaxations semi-définies peuvent être certifiées infaisables par un certificat (numérique) de Farkas ; le problème généralisé sur les moments est donc également infaisable. Par la Proposition 3.16, le problème initial de contrôle optimal est donc également infaisable.

Remarque 3.26 *L'infaisabilité d'un problème n'est pas spécialement détectée à la première relaxation. Dans le problème ci-dessus, en remplaçant l'ensemble \mathbf{K} par (le très artificiel)*

$$\mathbf{K}' := \left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{u} \in \mathbb{R}^m : t(\frac{1}{4} - t)(\frac{3}{4} - t)(1 - t) \geq 0 \\ 1 - \underline{x}^2 \geq 0 \\ 1 - \underline{u}^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

dont la projection est donnée en Figure 3.6, l'infaisabilité n'est détectée qu'à la deuxième relaxation (d'ordre 3).

De la même manière, on considère ici le cas où l'ensemble terminal \mathbf{K}_b a une intersection vide avec \mathbf{K} , et on vérifie numériquement l'infaisabilité du problème.

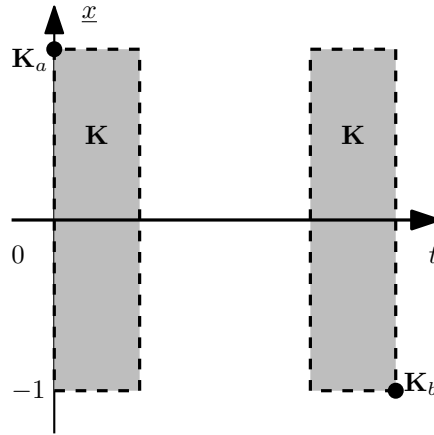


FIGURE 3.6 – Domaine non-connexe modifié pour la Remarque 3.26.

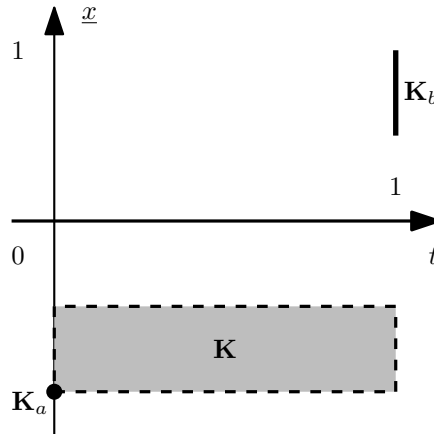


FIGURE 3.7 – Domaine non-connexe pour l'Exemple 3.27.

Exemple 3.27 (Domaine non connexe (2)) Soit

$$\begin{aligned}
 J &= \inf \int_0^1 x^2 dt \\
 \text{t.q. } &\dot{x} = u, \\
 &x(0) = -1, \\
 &(x(1) - \tfrac{1}{2})(1 - x(1)) \geq 0, \\
 &(x(t) + 1)(-\tfrac{1}{2} - x(t)) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

dont la projection des ensembles \mathbf{K} et \mathbf{K}_b est donnée à la Figure 3.7. L'infaisabilité est détectée à la première relaxation (d'ordre 1).

L'exemple suivant explore un système non-contrôlable – c'est même une simple équation différentielle à résoudre – dont on impose les conditions aux deux bouts. Bien évidemment, seule la condition finale compatible avec la condition initiale forme un problème faisable.

Exemple 3.28 (Système non contrôlable) Soit

$$\begin{aligned}
 J &= \inf \int_0^1 x^2 dt \\
 \text{t.q. } &\dot{x} = u, \\
 &x(0) = -1, \\
 &x(1) = 0, \\
 &x^2(t) \leq 1, \\
 &u(t) = 1.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

On obtient bien $J = \frac{1}{3} \approx 0.3333$ à la deuxième relaxation (d'ordre 2). Pour tout autre choix du point final (numériquement, pour $|x(1)| \geq 10^{-4}$ avec le solveur SeDuMi [Stu99] et $|x(1)| \geq 10^{-7}$ avec Mosek [dt13]), le problème est certifié infaisable dès la première relaxation.

L'exemple suivant illustre un problème possédant plusieurs solutions optimales. Comme pour le cas de l'optimisation polynomiale, cela veut dire que toute combinaison probabiliste *des mesures d'occupations* des solutions individuelles, dans le sens du Corollaire 3.17, sera aussi solution du problème. Cela n'implique pas nécessairement que la méthode admet comme solution des combinaisons convexes *de trajectoires*, qui pourraient elles être non-admissibles et avoir donc un meilleur coût.

Exemple 3.29 (Solutions multiples) Soit

$$\begin{aligned}
 J &= \inf \int_0^1 x^2 dt \\
 \text{t.q. } &\dot{x} = u, \\
 &x(0) = 0, \\
 &x^2 \leq 1, \\
 &u^2 \leq 1, \\
 &x^2 + (t - \frac{3}{4})^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

La géométrie du problème ainsi que les solutions optimales sont illustrées à la Figure 3.8. Pour chacune de ces trajectoires, on a $J \approx 0.0217$. La Table 3.3 reprend les coûts en fonction de l'ordre des relaxations semi-définies. On peut également certifier numériquement que la mesure μ_b est une⁴ combinaison convexe de Dirac, i.e. $\text{supp } \mu_b(dt, d\underline{x}) = \{1\} \times \{\pm \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)\}$. Si la méthode admettait les combinaisons convexes de trajectoires, alors le couple $(u(t) = 0, x(t) = 0)$, combinaison des deux trajectoires optimales avec un poids d'un demi chacune, aurait été choisi, celui-ci ayant un coût nul. On observe par contre que la convergence est relativement lente, probablement à cause de ces mêmes symétries.

L'exemple final est le problème prototype pour illustrer les sauts de relaxation.

⁴SeDuMi implémentant une méthode de points intérieurs, on obtiendra bien « une » combinaison, sa valeur précise étant conditionné par l'implémentation particulière du solveur.

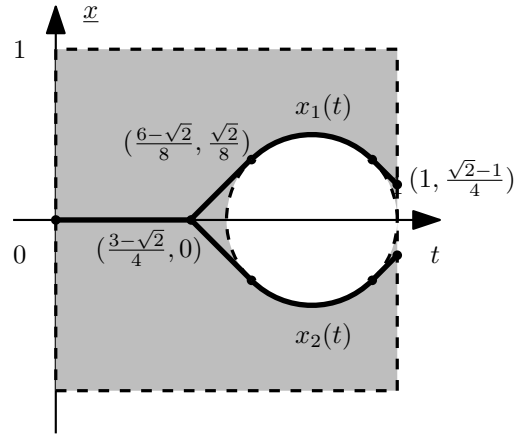


FIGURE 3.8 – Les deux solutions optimales de l'Exemple 3.29.

r	J_r
1	$5.9814e - 12$
2	$1.1191e - 09$
3	0.0119
4	0.0178
5	0.0204
6	0.0208

TABLE 3.3 – Bornes inférieures sur le coût en fonction de l'ordre de relaxation r pour l'Exemple 3.29

Exemple 3.30 (Saut de relaxation) Soit

$$\begin{aligned}
 J &= \inf \int_0^1 x^2 dt \\
 \text{t.q. } &\dot{x} = u, \\
 &x(t) = \frac{1}{2}, \\
 &u^2(t) = 1, \\
 &x(0) = \frac{1}{2}, \\
 &x(1)^2 \leq 1.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

On a bien évidemment que la contrainte forte sur l'état impose $u(t) = 0$ si l'on se limite aux contrôles ordinaires, en contradiction avec la contrainte sur l'ensemble de contrôle. Si l'on relâche sur les contrôles généralisés, on peut bien évidemment réaliser $x(t) = 0$ avec le contrôle $\omega(d\underline{u}|t) = \frac{1}{2}\delta_{-1}(d\underline{u}) + \frac{1}{2}\delta_{+1}(d\underline{u})$. Un saut strict de relaxation – ici infini – existe. La méthode renvoie bien dès la première relaxation le coût du problème relâché.

3.8 Conclusion

Ce chapitre montre comment les problèmes de commande optimale à contrôle borné peuvent être relâchés en un PGM. Ceci est possible grâce aux mesures d'occupation, un objet linéaire encodant les trajectoires admissibles. On utilise alors les outils du chapitre 2 pour résoudre ce problème numériquement.

La problématique principale d'un point de vue pratique est la croissance polynomiale –l'exposant étant la somme du nombre de variables d'état, de contrôle et de temps– de la taille des matrices des moments en fonction de l'ordre de relaxation. Dans les chapitres suivants, nous introduisons la possibilité de modéliser le contrôle par une mesure, et non comme une variable mesurée comme dans ce chapitre. Cela permet notamment de modéliser les contrôles non bornés. Dans le chapitre 6, nous revenons aux problèmes à contrôle borné de ce chapitre, et montrons comment ces nouvelles techniques permettent aussi de s'attaquer à certains problèmes non-triviaux de manière plus efficace.

Chapitre 4

Mesures-contrôles pour les systèmes linéaires

Sommaire

4.1	Introduction	53
4.2	Problèmes linéaires impulsionnels	54
4.2.1	Représentation interne des systèmes linéaires	55
4.2.2	Vers une instance du PGM	56
4.2.3	Dualité conique	58
4.2.4	Approximation polynomiale	61
4.2.5	Exemples	63
4.3	Applications au rendez-vous orbital	68
4.3.1	Présentation du problème	68
4.3.2	Application à la mission PRISMA	69
4.3.3	Améliorations	69
4.4	Conclusion	70

4.1 Introduction

Le chapitre précédent illustre le cas des systèmes non-linéaires généraux, lorsque le contrôle est borné. Il y est montré comment ces problèmes peuvent être résolus *globalement*, sans que les *phénomènes d'oscillations* ne posent problème. Ceci est possible en posant le problème de commande optimale comme un Problème Généralisé des Moments (PGM) où l'espace de contrôle est mesuré, ce que nous appelons les *contrôles mesurés*.

Ce chapitre introduit quant à lui le concept de modélisation du contrôle *par* une mesure, dénoté de manière synthétique par *mesure-contrôle*. Ceci est possible si le contrôle rentre linéairement dans les problèmes de commande optimale. Si le contrôle n'est pas borné, les *phénomènes de concentrations* peuvent alors poser problème. De nouveau, grâce au formalisme des mesures et à la flexibilité du PGM, on capture ces phénomènes sans peine.

Les chapitres suivants explorant également l'emploi de *mesures-contrôles*, ce chapitre est dédié exclusivement aux systèmes *linéaires*, c'est-à-dire pour lesquels l'état rentre aussi de manière affine dans la dynamique. On retrouve alors bon nombre de résultats classiques issus de la littérature de la course à l'espace des années 1960, où le caractère de PGM de ces problèmes de commande optimale est explicitement reconnu, voir notamment [Neu64], dont le titre est « Optimization : a Moment Problem » ou encore [But69, Ch.4], intitulé fort à propos « The Method of Moments ». La contribution principale de ce chapitre est l'application des méthodes numériques modernes exposées au deuxième chapitre et de la théorie de l'approximation pour la résolution effective de tels problèmes, sans aucune discrétisation.

Organisation du chapitre

La section 4.2 présente les problèmes de commande en normale minimale qui seront l'objet de ce chapitre. En §4.2.1, certaines propriétés bien connues des systèmes linéaires, qui permettent en §4.2.2 de poser le problème de commande comme un PGM, sont rappelées. La section §4.2.3 applique la dualité conique pour caractériser les solutions du problème. En §4.2.4, on introduit les techniques d'approximation polynomiale qui permettent d'obtenir un PGM à données polynomiales, l'étape-clé de la méthode numérique. Après deux exemples académiques en §4.2.5, la méthode est appliquée en §4.3 à un exemple non-trivial issu de la littérature des rendez-vous orbitaux.

4.2 Problèmes linéaires impulsionnels

Dans cette section, nous considérons comment résoudre par l'optimisation semi-définie les problèmes de la forme :

Problème 4.1 (Norme minimale)

$$J = \inf_{u(t)} \int_a^b \|u(t)\|_1 dt \quad \left(= \inf_{u(t)} \int_a^b \sum_{j=1}^m |u_j(t)| dt \right)$$

$$\text{t.q. } \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \\ a, b, x(a), x(b) &\text{ donnés} \end{aligned}$$

où :

- (i) Chacun des m éléments du vecteur de contrôle $u_j \in L_1([a, b])$, $j = 1, \dots, m$, appartient aux fonctions intégrables ;
- (ii) Chacun des n éléments du vecteur d'état $x_i \in AC([a, b])$, $i = 1, \dots, n$, appartient aux fonctions absolument continues ;
- (iii) Chacun des n éléments du vecteur de forçage $w_i \in C([a, b])$, $i = 1, \dots, n$, appartient aux fonctions continues ;

- (iv) Chacun des $n \times n$ éléments de $A_{ij} \in BV([a, b])$, $i, j = 1, \dots, n$, appartient aux fonctions à variation bornée ;
- (v) Chacun des $n \times m$ éléments de $B_{ij} \in C([a, b])$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, appartient aux fonctions continues. Leurs dérivées $\dot{B}_{ij} \in BV([a, b])$ est à variation bornée ;
- (vi) $[a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} non trivial et borné.

La motivation pratique derrière cette formulation est l'application aux calculs de plans de trajectoires optimaux de satellites à dynamiques linéarisées. Le coût reflète directement la consommation de carburant combinée des m actionneurs¹ lorsque l'attitude du satellite est fixée. Une telle application est présentée en §4.3.

Comme montré à l'Exemple 1.2 p.4, une des problématiques derrière les problèmes posés sous une telle forme sont les effets de *concentration*, où la solution optimale tend vers des contrôles concentrés aux quelques instants favorables, la trajectoire optimale présentant alors des discontinuités. La solution présentée dans cette section permet de traiter ces phénomènes intégralement.

4.2.1 Représentation interne des systèmes linéaires

Avant de passer à la résolution proprement dite du Problème 4.1 de commande impulsionnelle, nous rappelons un résultat bien connu de la théorie des Équations Différentielles Ordinaires (EDO) : la *représentation interne*² des systèmes linéaires permet d'obtenir la trajectoire au temps t comme une forme affine sur l'état initial et sur la commande. Ce résultat est crucial pour pouvoir poser le problème comme un PGM défini sur des espaces univariés, contrairement au chapitre précédent où les mesures étaient posées sur des espaces euclidiens de dimension $1 + n + m$, pour le temps, l'état et le contrôle. Nous suivons ici le traitement dans [BP07] et [Tré05].

Considérons le système non forcé :

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) \tag{4.1}$$

dont on veut étudier la réponse sur un intervalle de temps borné $[a, b]$.

Définition 4.2 La résolvante $R(t, s)$ de ce système est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, s) = A(t) R(t, s), \quad R(s, s) = I_n. \tag{4.2}$$

La résolvante possède de nombreuses propriétés :

¹Technologiquement, il y aura même $2m$ actionneurs pour pouvoir pousser dans les directions « positives » et « négatives ».

²Anglais : « input-to-output relationship ».

- $R(t, s)$ dépend continument de $A(t)$, voir [BP07, Théorème 2.2.4] pour le résultat complet ;
- Sur tout intervalle de temps borné, $M(t, s)$ est inversible, avec $M^{-1}(t, s) = M(s, t)$, et cet inverse est continûment différentiable ;
- Le déterminant de $R(t, s)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\partial (\det R)}{\partial t}(t, s) = \operatorname{tr}(A(t)) \det R(t, s), \quad \det R(s, s) = 1. \quad (4.3)$$

Enfin, la résolvante permet d'obtenir l'expression analytique de la trajectoire :

Proposition 4.3 (Formule de la variation de la constante) *Pour $u(t)$ et $x(a)$ donnés, la solution du problème de Cauchy*

$$\dot{x} = A(t) x(t) + B(t) u(t) + w(t) \quad (4.4)$$

peut s'écrire comme :

$$x(t) = R(t, a) x(a) + \int_a^t R(t, s) (B(s) u(s) + w(s)) ds. \quad (4.5)$$

Pour les applications de ce chapitre, on peut en pratique raffiner les résultats pour n'avoir à manipuler qu'une matrice de fonctions univariées. Soit $f_i \in \mathcal{W}^{1,1}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ les solutions du problème de Cauchy

$$\dot{f}_i(t) = A(t) f_i(t), \quad f_i(\tau) = e_i \quad (4.6)$$

pour $\tau \in \mathbb{R}$ un temps initial arbitraire fini et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathbb{R}^n . Chaque matrice

$$F(t) := \begin{bmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

possède les mêmes propriétés que $R(t, s)$ et satisfait

$$R(t, s) = F(t) F^{-1}(s). \quad (4.8)$$

L'équation (4.5) peut alors se réécrire comme :

$$F^{-1}(t) x(t) = F^{-1}(a) x(a) + \int_a^t F^{-1}(s) (B(s) u(s) + w(s)) ds. \quad (4.9)$$

Remarque 4.4 *La résolvante $R(t, s)$ est unique mais $F(t)$ dépend du choix du temps initial τ et de la base $\{e_i\}$. Pour le reste du chapitre, on considèrera sauf mention explicite le choix $\tau = a$ et $\{e_i\}_{i \in 1 \dots n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .*

4.2.2 Vers une instance du PGM

Les résultats développés ci-dessus, tirés principalement de [Neu64], permettent de traiter facilement les contraintes de dynamiques du Problème 4.1. En effet, en posant

$$G(t) := F^{-1}(t)B(t) \in C([a, b]; \mathbb{R}^{n \times m}), \quad (4.10)$$

$$h := F^{-1}(b)x(b) - F^{-1}(a)x(a) - \int_a^b F^{-1}(s)w(s)ds \in \mathbb{R}^n \quad (4.11)$$

les contraintes dynamiques

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad (4.12)$$

$$a, b, x(a), x(b) \text{ donnés} \quad (4.13)$$

se réécrivent

$$\int_a^b G(t)u(t)dt = h. \quad (4.14)$$

Cette dernière équation suggère de considérer les contrôles comme un vecteur de fonctionnelles linéaires agissant sur l'espace vectoriel des fonctions continues muni de la norme suprénum. Par les résultats de §2.2, on peut donc voir les contrôles $u(t) \in L_1([a, b])$ comme un sous ensemble de $\mathcal{M}([a, b])$ si l'on préserve la norme, par :

$$u(t)dt \longrightarrow \nu(dt), \quad \nu \in \mathcal{M}([a, b]). \quad (4.15)$$

Le Problème 4.1 de commande impulsionnelle peut donc être relâché par un Problème 2.22 Généralisé des Moments sous la forme du :

Problème 4.5 (PGM, mesures signées)

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{\nu} \sum_{j=1}^m \int_a^b |\nu_j|(dt) \quad (:= \|\nu\|_{\text{TV}}) \\ \text{t.q.} \quad &\langle G, \nu \rangle = h, \\ &\nu_j \in \mathcal{M}([a, b]), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ici, $\langle G, \nu \rangle = h$ est la notation compacte pour :

$$\sum_{j=1}^m \int_a^b G_{ij}(t) \nu_j(dt) = h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

Ce problème est bien une relaxation du Problème 4.1 puisque l'espace des solutions a été élargi. Lorsqu'on restreint son espace aux seules mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$, on retrouve d'ailleurs le Problème 4.1 puisque pour chacune de ces mesures, il existe $u_j \in L_1([a, b])$ tel que $\nu_j(dt) = u_j(t)dt$.

On a donc :

Proposition 4.6 (Relaxation)

$$J \geq J_M. \quad (4.18)$$

La section suivante explore le dual du Problème 4.5, ce qui permet de caractériser la structure des solutions du problème. On montre alors qu'on a réellement $J = J_M$.

Enfin, il est possible de réécrire le Problème 4.5 sur les mesures signées comme un problème linéaire sur le cône des mesures non-négatives. En effet, par [RF10, proposition 21.12], il existe deux mesures positives ν_j^+ et ν_j^- telles que

$$\nu_j = \nu_j^+ - \nu_j^- \quad \text{et} \quad \|\nu_j\|_{\text{TV}} = \langle 1, \nu_j^+ \rangle + \langle 1, \nu_j^- \rangle \quad (4.19)$$

de sorte que

$$\inf_{\nu_j \in \mathcal{M}} \|\nu_j\|_{\text{TV}} \geq \inf_{\nu_j^\pm \in \mathcal{M}^+} \langle 1, \nu_j^+ \rangle + \langle 1, \nu_j^- \rangle. \quad (4.20)$$

Comme

$$\langle 1, \nu_j^+ \rangle + \langle 1, \nu_j^- \rangle \geq \|\nu_j^+ - \nu_j^-\|_{\text{TV}}, \quad (4.21)$$

ceci permet de réécrire le Problème 4.5 comme le :

Problème 4.7 (PGM, mesures positives)

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{\nu^\pm} \sum_{j=1}^m \langle 1, \nu_j^+ \rangle + \langle 1, \nu_j^- \rangle \\ \text{t.q.} \quad &\langle G, \nu^+ \rangle - \langle G, \nu^- \rangle = h, \\ &\nu_j^\pm \in \mathcal{M}^+([a, b]), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

4.2.3 Dualité conique

Cette section présente le problème dual associé au Problème 4.7, en mettant en perspective les résultats de [Neu64] par rapport aux résultats plus modernes présentés au chapitre 2. En utilisant des résultats de §2.3.4, on obtient directement le dual conique associé :

$$\begin{aligned} P &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \\ \text{t.q.} \quad &z_j^-(t) := 1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i g_{ij}(t) \geq 0 \quad t \in [a, b], \\ &z_j^+(t) := 1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i g_{ij}(t) \geq 0 \quad t \in [a, b] \end{aligned} \quad (4.22)$$

où la variable de décision est un vecteur γ paramétrant deux vecteurs de fonctions non-négatives $z^+ \in C([a, b]; \mathbb{R}^m)$, $z^- \in C([a, b]; \mathbb{R}^m)$. En notant

$$\|z\|_\infty := \sup_{t \in [a, b], j=1, \dots, m} |z_j(t)| \quad (4.23)$$

pour tout $z \in C([a, b]; \mathbb{R}^m)$, ceci permet de réécrire (4.22) comme

Problème 4.8 (Problème dual)

$$P = \sup_{\substack{\gamma \in \mathbb{R}^n \\ \text{t.q.} \quad \|G^T(t)\gamma\|_\infty \leq 1}} h^T \gamma$$

Lemme 4.9 *Si le Problème 4.7 possède un élément admissible, alors la dualité forte est vraie :*

$$P = J_M. \quad (4.24)$$

Preuve *On remarque que la finitude de J_M est immédiate car le critère de variation totale impose $J_M \geq 0$ et de valeur finie s'il existe au moins un élément admissible. En définissant alors le vecteur $r(\nu^+, \nu^-) \in \mathbb{R}^{n+1}$ dont les entrées sont données par :*

$$r_0(\nu^+, \nu^-) := \sum_{j=1}^m \langle 1, \nu_j^+ \rangle + \langle 1, \nu_j^- \rangle, \quad (4.25)$$

$$r_i(\nu^+, \nu^-) := \sum_{j=1}^m \langle g_{ij}, \nu_j^+ \rangle - \langle g_{ij}, \nu_j^- \rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.26)$$

il faut, selon le Théorème 2.35, prouver la fermeture dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de

$$\mathbf{R} := \{r(\nu^+, \nu^-) : (\nu^+, \nu^-) \in [\mathcal{M}^+]^{2m}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (4.27)$$

Pour démontrer la fermeture de R , on peut par exemple montrer que tous les points d'accumulation pour une suite quelconque de $r(\nu_n^+, \nu_n^-)$ appartiennent à \mathbf{R} . Comme les mesures sont à support compact et que J_M est fini, ν^+ et ν^- sont bornées, ce qui implique que la suite (ν_n^+, ν_n^-) est bornée. Par le théorème d'Alaoglu (voir par exemple [Lue97, Section 5.10] ou [RF10, Section 15.1]) montrant la compacité de la boule unité dans l'espace des mesures signées à support compact pour la topologie faible-, $(\nu_{n_k}^+, \nu_{n_k}^-)$ possède une sous-suite convergeant *-faiblement vers un élément $(\nu^+, \nu^-) \in [\mathcal{M}^+]^{2m}$. Comme 1 et tous les g_{ij} appartiennent à $C([a, b])$, on a bien $\lim_{k \rightarrow \infty} r(\nu_{n_k}^+, \nu_{n_k}^-) = r(\nu^+, \nu^-) \in R$. ■*

L'absence de saut de dualité implique que l'infimum est atteint s'il existe un élément admissible, et selon le Théorème 2.31, qu'il existera toujours une mesure supportée sur n points atteignant le minimum. Ces points peuvent être déterminés à partir des suites de moments tronquées grâce à la méthode mentionnée en §2.3.2, ou bien en utilisant les relations de complémentarité si l'on connaît une solution primale.

La caractérisation des solutions optimales comme sous-ensemble des mesures atomiques permet de raffiner la Proposition 4.6 :

Proposition 4.10 (Pas de saut de relaxation)

$$J = J_M. \quad (4.28)$$

Preuve Nous reprenons la preuve de [Neu64, pp. 45-46], un peu cachée dans le texte. Elle consiste à montrer qu'il existe toujours une fonction \tilde{u} avec les mêmes moments qu'une solution optimale et de norme arbitrairement proche.

Il existe donc toujours une solution optimale ν^* au Problème 4.7 sous la forme

$$\nu^*(dt) = U_i \delta_{t_i}(dt), \quad i = 1 \dots n, \quad (4.29)$$

avec U_i un vecteur d'amplitudes de saut associé au temps d'impulsion t_i . Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe donc toujours n intervalles de temps \mathbf{T}_i^ϵ définis par

$$\mathbf{T}_i^\epsilon = \begin{cases} [a, \epsilon] & \text{si } t_i = a \\ [\epsilon, b] & \text{si } t_i = b \\ [t_i - \frac{\epsilon}{2}, t_i + \frac{\epsilon}{2}] & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

tels que leur intersection est nulle.

Pour chacun de ces intervalles, nous considérons l'ensemble

$$\mathbf{K}_i := \left\{ \int_{\mathbf{T}_i} G(t) u(t) dt : u(t) \in F(\mathbf{T}_i; \mathbb{R}^m), \|u(t)\| \leq |U_i|_1 \right\}. \quad (4.31)$$

L'ensemble \mathbf{K}_i est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n , avec l'origine appartenant à son intérieur relatif et $G(t_i) U_i$ appartenant à sa fermeture. Dès lors, pour chaque intervalle \mathbf{T}_i de longueur ϵ , il existe une fonction $u_i(t) \in F(\mathbf{T}_i; \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\int_{\mathbf{T}_i} G(t) u_i(t) dt = \frac{1}{1 + \epsilon} G(t_i) U_i \quad (4.32)$$

et $\|u_i(t)\| \leq |U_i|_1$. En définissant

$$\tilde{u} := (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad (4.33)$$

on a donc bien l'égalité

$$\int_a^b G(t) \tilde{u}(t) dt = \langle G, \nu^* \rangle \quad (4.34)$$

tout en garantissant

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq (1 + \epsilon) \|\nu^*\|_{\text{TV}}. \quad (4.35)$$

Comme ϵ est arbitraire, le résultat s'ensuit. ■

A la fin de son article, [Neu64] propose donc d'exploiter les conditions suffisantes ci-dessus pour résoudre le problème du rendez-vous :

1. Construire analytiquement le Problème 4.8 ;
2. Discrétiser les contraintes sur un maillage de $[a, b]$ pour obtenir un problème d'optimisation linéaire à dimension finie ;
3. Utiliser les conditions de complémentarité pour déduire le support des mesures et donc les temps d'impulsions ;

4. Résoudre un système linéaire associé pour en déduire les amplitudes d'impulsions.

Il semble que cette méthode n'ait néanmoins pas trouvé d'écho dans la pratique. La raison principale provient probablement de la discrétisation des contraintes qui enlève l'attrait principal d'exploiter les conditions nécessaires sous la forme de résultats « exacts ». Une autre raison est que, tant qu'à discrétiser le problème, les méthodes directes sont plus simples à implémenter et déjà très efficaces.

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons de reprendre [Neu64] mais en suivant une approche purement primale sur les mesures, sans faire appel explicitement³ à la dualité conique. Pour pouvoir appliquer génériquement les méthodes du chapitre 2 au Problème 4.7, il faut d'abord avoir recours à certaines méthodes d'approximation polynomiale. Ceci permet d'éviter la discrétisation du problème.

4.2.4 Approximation polynomiale

Rappelons l'Exemple 1.2 et relâchons-le sous la forme du Problème 4.7. On obtient pour ce problème que

$$G(t) = t(1 - t), \quad (4.36)$$

de sorte que toutes ses données sont polynomiales. Comme toutes les mesures du problème sont univariées, les résultats de §2.3.5 montrent que la première relaxation semi-définie, d'ordre r_0 , est nécessaire et suffisante. Malheureusement, les problèmes où $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}[t]$ sont très restrictifs, requérant une chaîne d'intégrateurs comme dynamique et une matrice $B(t)$ à entrées polynomiales. Dans cette section, une méthode d'approximation polynomiale est développée, permettant de lever cet obstacle pour l'implémentation numérique.

Les deux opérations à réaliser sont :

1. L'intégration numérique de l'ODE $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ pour obtenir $F(t)$;
2. La résolution du système $F(t)G(t) = B(t)$, pour obtenir $G(t)$ sous forme polynomiale.

Ceci peut être effectué de deux manières. Premièrement, il peut exister une solution analytique connue de l'ODE. C'est notamment le cas si A est constante, et la solution s'obtient alors comme une exponentielle de matrice. L'inversion peut alors aussi s'effectuer analytiquement. Le problème d'approximation consiste alors à approcher G analytique le plus fidèlement possible sur $[a, b]$. L'autre possibilité est que l'ODE n'a pas de solution analytique connue. Il faut alors trouver un polynôme approchant la solution de l'ODE et l'inverser numériquement pour trouver une approximation numérique de G .

Le logiciel choisi en pratique pour ces opérations est Chebfun [TT11] car

- Le logiciel se base sur les interpolations polynomiales aux nœuds de Tchebychev, qui offrent un bon compromis entre efficacité numérique et qualité d'interpolation ([Tre13] présente une introduction très didactique sur le sujet) ;

³Bien évidemment, vu les solveurs auto-duaux utilisés pour résoudre les problèmes semi-définis, le problème dual est résolu implicitement.

- Pour ce choix d'approximation, on obtient directement les coefficients exprimés dans la base des polynômes de Tchebychev, dont la matrice des moments est nettement mieux conditionnée numériquement si l'on veut recouvrer un grand nombre d'impulsions, voir §2.4.2 ;
- L'intégration numérique peut se faire aisément par deux méthodes différentes, permettant une certaine flexibilité de résolution. La fonction `linop` permet en effet de résoudre l'équation différentielle en calculant l'opérateur linéaire associé et en l'appliquant aux termes de forçage (nuls dans notre cas). La fonction `ode45` permet quant-à elle de trouver une approximation polynomiale de la solution de l'équation différentielle intégrée numériquement par une méthode de Runge-Kutta ;
- Il est aisé de programmer des problèmes dont les définitions peuvent être assez compliquées, voir par exemple le traitement du rendez-vous spatial en §4.3 ;
- Sa disponibilité en tant que boîte à outil Matlab permet un interfaçage rapide avec un grand nombre de solveurs semi-définis.

Soit donc $G_d(t)$ l'approximation sur d noeuds de Tchebychev de $G(t)$. On ne considèrera pour la suite que les erreurs introduites par cette approximation, en prenant comme hypothèse que l'erreur introduite par l'éventuelle intégration numérique et les manipulations algébriques est négligeable. Il est dès lors possible de caractériser l'erreur $e_d := \|G_d - G\|_\infty$ introduite par l'approximation polynomiale. En effet, il est bien connu dans la théorie de l'approximation que la régularité de $G(t)$ conditionne fortement l'erreur. Nous rappelons les résultats suivant qui peuvent se consulter facilement dans [Tre13] :

- Pour $G(t)$ k fois continûment différentiable, $e_d = \mathcal{O}(d^{-k})$ lorsque $d \rightarrow \infty$: l'erreur décroît de manière polynomiale ;
- Pour $G(t)$ k fois différentiable et dont la k -ième dérivée est de variation bornée, $e_d = \mathcal{O}(d^{-k})$: l'erreur décroît de manière polynomiale de la même manière que pour les fonctions continûment différentiables ;
- Pour $G(t)$ analytique, il existe un ρ positif tel que $e_d = \mathcal{O}(\rho^{-d})$: l'erreur décroît de manière exponentielle.

On en déduit directement certaines conditions suffisantes de régularité sur $A(t)$ et $B(t)$ –celles-mêmes énoncées dans les hypothèses du Problème 4.1– pour garantir la convergence asymptotique de l'erreur d'approximation vers zéro quand le nombre de noeuds est augmenté :

Proposition 4.11 *Soit $A(t)$ à variation bornée sur $[a, b]$ et $B(t)$ une fois différentiable avec dérivée à variation bornée. Alors,*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e_d \rightarrow 0. \quad (4.37)$$

Nous montrons maintenant que lorsque l'erreur d'approximation tend vers 0, on peut construire une hiérarchie de problèmes approchés, chacun à données polynomiales et donc résoluble numériquement par des conditions semi-définies exposées en §2.3.5, et dont le coût tend vers J . Pour tout d , on note donc par e_d la valeur *connue* de l'erreur d'approximation.

Lemme 4.12 *Soit le problème approché suivant à données polynomiales :*

$$\begin{aligned} \tilde{J}_M^d = \min_{\nu} \quad & \|\nu\|_{TV} \\ \text{t.q.} \quad & |\langle G, \nu \rangle - h| \leq e_d \|\nu\|_{TV}, \\ & \nu \in \mathcal{M}([a, b]). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Alors :

$$\tilde{J}_M^d \uparrow J_M \quad \text{pour} \quad e_d \rightarrow \infty. \quad (4.39)$$

Preuve *Supposons que le Problème 4.5 ait une solution. Alors une solution au problème (4.38) existe, puisque chaque solution ν^* du Problème 4.5 est admissible pour (4.38) par*

$$\begin{aligned} |\langle G_d, \nu^* \rangle - h| &\leq |\langle G, \nu^* \rangle - h| + |\langle G_d - G, \nu^* \rangle| \\ &\leq 0 + e_d \|\nu^*\|_{TV}. \end{aligned}$$

Nous avons donc $\tilde{J}_M^d \leq J_M$.

Pour prouver la convergence, soit le problème auxiliaire suivant aux données exactes :

$$\begin{aligned} J_M^d = \min_{\nu} \quad & \|\nu\|_{TV} \\ \text{t.q.} \quad & |\langle G_d, \nu \rangle - h| \leq 2 e_d \|\nu\|_{TV}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Par la même construction que plus haut, nous avons $J_M^d \leq \tilde{J}_M^d \leq J_M$. Puisque J_M est une borne uniforme pour chaque solution de (4.40), des arguments standards (voir par exemple la deuxième partie du théorème de Banach-Saks-Steinhaus dans [RF10, Section 13.5]) montrent que $J_M \leq \liminf_{d \rightarrow \infty} J_M^d$, donc $J_M^d \rightarrow J_M$ et $\tilde{J}_M^d \rightarrow J_M$ quand $d \rightarrow \infty$. ■

Remarque 4.13 *Dans le problème ci-dessus, on ne considère qu'une approximation sur G dans les données des problèmes approchés. En particulier, h est supposé exact dans les problèmes relâchés et est calculé sans utiliser les approximations F_d et/ou une approximation de $w(s)$. La preuve ci-dessus peut néanmoins s'adapter pour prendre en compte un h_d calculé de telle façon, au prix d'une exposition plus lourde.*

4.2.5 Exemples

Le premier exemple reprend l'Exemple 1.2 du chapitre d'introduction de ce mémoire pour illustrer les étapes de l'approche :

Exemple 4.14 (Exemple polynomial simple) Nous reprenons l'exemple :

$$\begin{aligned} J &= \inf \quad \int_0^1 |u(t)| dt \\ \text{t.q.} \quad & \dot{x} = t(1-t)u, \\ & x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

d'où l'on tire que

$$F(t) = 1, \quad G(t) = t(1-t), \quad h = 1. \quad (4.42)$$

On peut donc relâcher le problème comme un problème linéaire sur le cône des mesures positives sous la forme du Problème 4.1 :

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{\nu^\pm} \quad \langle 1, \nu^+ \rangle + \langle 1, \nu^- \rangle \\ \text{t.q.} \quad & \langle t(1-t), \nu^+ \rangle - \langle t(1-t), \nu^- \rangle = 1, \\ & \nu^\pm \in \mathcal{M}^+([0, 1]), \end{aligned} \quad (4.43)$$

où les mesures μ^+, μ^- sont les variables de décision.

La résolution analytique de ce problème est aisée en utilisant son dual, le Problème 4.8 :

$$\begin{aligned} P &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \gamma \\ \text{t.q. } &-1 \leq t(1-t)\gamma \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En effet, on obtient que le maximum $P = 4$ est atteint pour $\gamma = 4$. Puisque le polynôme $4t(1-t)$ atteint son maximum en $t = \frac{1}{2}$, il s'ensuit d'après le Lemme 4.9 que les mesures optimales sont $\nu^+ = 4\delta_{\frac{1}{2}}$ et $\nu^- = 0$, pour lesquelles $J_M = 4$.

Nous comparons maintenant ces résultats avec l'approche proposée dans ce chapitre. Dans la base des monômes (par simplicité d'exposition), en posant $y_k^\pm := \langle t^k, \nu^\pm \rangle$, cela donne :

$$\begin{aligned} J_M &= \inf y_0^+ + y_0^- \\ \text{t.q. } &y_1^+ - y_2^+ - y_1^- + y_2^- = 1, \\ &M_1(y^\pm) := \begin{bmatrix} y_0^\pm & y_1^\pm \\ y_1^\pm & y_2^\pm \end{bmatrix} \succeq 0, \\ &M_0(t(1-t) * y^\pm) := y_1^\pm - y_2^\pm \succeq 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

où les contraintes semi-définies imposent la représentativité des suites de moments sur $[0, 1]$.

Remarque 4.15 Dans l'exemple ci-dessus, le passage vers la première relaxation semi-définie peut être complètement automatisé en utilisant GloptiPoly, présenté à la section §2.4.1 :

```
>> mpol tp tn;
>> mp = meas(tp); % mesure \nu^+
>> mn = meas(tn); % mesure \nu^-
>> P = msdp(min(mass(tp)+mass(tn)), ...
    mom(tp*(1-tp))-mom(tn*(1-tn)) == 1, ...
    tp*(1-tp) >= 0 ... % support de \nu^+
    tn*(1-tn) >= 0); % support de \nu^-
>> [stat, obj] = msol(P);
obj =
    4.0000
>> double(mmat(mp)) % matrice des moments de \nu^+
ans =
    4.0000    2.0001
    2.0001    1.0001
>> double(mmat(mn)) % matrices des moments \nu^-
ans =
    1.0e-08 *
    0.2673    0.2036
    0.2036    0.2186
>> next(mp); double(mp) % extraction du temps d'impulsion
ans =
    0.5000
```

Ceci est possible car les moments sont exprimés dans la base des monômes qui est celle employée par GloptiPoly. Ce choix est valable car les données du problème sont de faible degré, et le conditionnement numérique des matrices des moments reste acceptable. Pour les exemples suivants et ceci jusqu'à la fin du chapitre, la base des polynômes trigonométriques sera préférée, car les données des problèmes nécessitent des approximations polynomiales de hauts degrés. Les relaxations semi-définies devront donc être codées individuellement pour chacun des problèmes, selon §2.4.2.

Exemple 4.16 (Dynamique discontinue) Cet exemple illustre les relations entre régularité des données et qualité de l'interpolation polynomiale. Soit le problème à dynamique discontinue :

$$\begin{aligned} J &= \inf \|u\|_1 \\ \text{t.q. } &\dot{x}(t) = \text{signe}(t) x(t) + u(t), \\ &x(-1) = -1, \quad x(1) = 1, \end{aligned} \quad (4.46)$$

où $u \in L_1([-1, 1])$. La résolution de l'ODE

$$\dot{F}(t) = \text{signe}(t) F(t), \quad F(-1) = 1 \quad (4.47)$$

donne $F(t) = e^{-1+|t|}$ et $G(t) = e^{1-|t|}$. Le Problème 4.1 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{\nu^\pm} \langle 1, \nu^+ \rangle + \langle -1, \nu^- \rangle \\ \text{t.q. } &\langle e^{1-|t|}, \nu^+ \rangle - \langle e^{1-|t|}, \nu^- \rangle = 2, \\ &\nu^\pm \in \mathcal{M}^+([-1, 1]). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Le Problème 4.8 dual s'écrit :

$$\begin{aligned} P &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} 2\gamma \\ \text{t.q. } &-1 \leq e^{1-|t|}\gamma \leq 1 \quad \forall t \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (4.49)$$

dont la solution analytique $\gamma^* = e^{-1}$ permet de déduire la solution duale $\nu^* = 2e^{-1}\delta_0(dt)$.

En appliquant la méthode développée dans ce chapitre, la discontinuité de $A(t) = \text{signe}(t)$ pose problème. En effet, $G(t)$ présente un point de rebroussement en $t = 0$. En choisissant un nombre pair de nœuds d'interpolation, l'erreur maximale d'interpolation $\|G - G_d\|_\infty$ sera localisée au temps d'impulsion optimal (tandis que pour un nombre impair de nœuds, l'interpolation sera exacte en cet endroit). L'exemple a précisément été construit en ce sens. La Table 4.1 présente l'erreur d'approximation en fonction du nombre de nœuds sélectionnés et le coût optimal \tilde{J}_M^d des conditions semi-définies déduites du problème approché. On observe la décroissance linéaire de l'erreur d'approximation et du coût optimal qui en résulte directement. L'erreur aux ordres modérés ($d \approx 100$) est acceptable mais loin d'être excellente. La Figure 4.1 présente quelques approximations polynomiales à ordre donné. On constate visuellement que l'erreur d'approximation est maximale au point de rebroussement.

Les résultats ci-dessus peuvent être spectaculairement améliorés si le domaine temporel est séparé de part et d'autre de la discontinuité. Les restrictions de $G(t)$ sur les intervalles

d	$\ G - G_d\ _\infty$	$ J_M - \tilde{J}_M^d / J_M $
10	0.1995	0.1243
20	0.0899	0.0555
30	0.0579	0.0357
40	0.0427	0.0263
50	0.0338	0.0208
60	0.0280	0.0172
70	0.0239	0.0147
80	0.0208	0.0128
90	0.0184	0.0114
100	0.0166	0.0102

TABLE 4.1 – Erreur d'approximation et coût en fonction de l'ordre d'approximation pour l'Exemple 4.16 à dynamique discontinue.

d	$\ G - G_d\ _\infty$	$ p^* - p_d / p^* $
2	$2.1187 \cdot 10^{-1}$	$3.4307 \cdot 10^{-3}$
4	$1.0851 \cdot 10^{-3}$	$1.0406 \cdot 10^{-5}$
6	$2.2540 \cdot 10^{-6}$	$1.5281 \cdot 10^{-8}$
8	$2.5115 \cdot 10^{-9}$	$1.3166 \cdot 10^{-11}$
10	$1.7422 \cdot 10^{-12}$	$5.9438 \cdot 10^{-13}$
12	$1.1336 \cdot 10^{-15}$	$5.8093 \cdot 10^{-12}$
14	$< 10^{-15}$	$1.3729 \cdot 10^{-11}$
16	$< 10^{-15}$	$3.1846 \cdot 10^{-12}$
18	$< 10^{-15}$	$2.5462 \cdot 10^{-10}$

TABLE 4.2 – Erreur d'approximation et coût en fonction de l'ordre d'approximation pour l'Exemple 4.16 à dynamique analytique par morceaux .

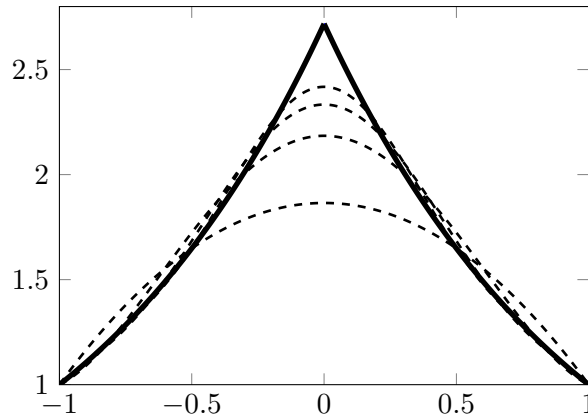


FIGURE 4.1 – Approximations (pointillés) pour 4, 6, 8 et 10 nœuds de G (gras), sans séparation d'intervalle.

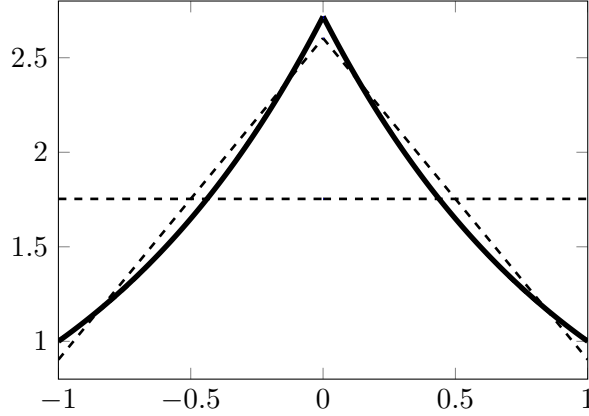


FIGURE 4.2 – Approximations (pointillés) pour 1, 2 et 3 nœuds de G (gras), avec séparation d'intervalle. L'ordre 3 est déjà invisible à l'œil nu.

$[-1, 0]$ et $[0, 1]$, respectivement $G_G(t) := e^{1+t}$ et $G_D(t) := e^{1-t}$, sont analytiques. Le PGM (4.5) sur ces sous-intervalles s'écrit :

$$J_M = \inf_{\nu_G, \nu_D} \|\nu_G\|_{TV} + \|\nu_D\|_{TV} \quad (4.50)$$

$$\text{t.q.} \quad \int_{-1}^0 G_G(t) \nu_G(dt) + \int_0^1 G_D(t) \nu_D(dt) = 2,$$

$$\nu_G \in \mathcal{M}([-1, 0]), \quad \nu_D \in \mathcal{M}([0, 1]).$$

La Table 4.2 présente l'erreur d'approximation et le coût en fonction du degré d'approximation choisi. La qualité de l'interpolation a été volontairement dégradée en tronquant la suite de coefficients de la série entière de l'exponentielle au lieu de sous-échantillonner comme le ferait Chebfun⁴, afin d'obtenir une interpolation non-exacte au temps d'impulsion. L'erreur sur le coût décroît effectivement de manière géométrique jusqu'à une erreur relative d'environ 10^{-10} . Pour les ordres d'approximation plus élevés, l'erreur se maintient aux environs de cette valeur, car ce sont maintenant les aspects numériques liés aux solveurs semi-définis qui dominent l'erreur, et non ceux de l'approximation polynomiale. La Figure 4.2 présente quelques approximations polynomiales à ordre donné. Dès 3 nœuds d'interpolation, l'approximation est indissociable à l'œil nu.

Remarque 4.17 *En procédant au découpage de l'intervalle de temps en sous-intervalles, le problème par morceaux peut avoir plusieurs solutions, même si sa version globale a bien une solution unique. C'est bien évidemment le cas dans l'exemple ci-dessus, puisque toute solution sous la forme*

$$\mu_G = s 2e^{-1} \delta_0(dt), \quad \mu_D = (1-s) 2e^{-1} \delta_0(dt), \quad 0 \leq s \leq 1$$

est optimale. Les solveurs semi-définis implémentant souvent en pratique des méthodes de point intérieur, c'est bien une telle combinaison qui sera renvoyée numériquement,

⁴Le fait que ces deux manières de réduire le degré d'une interpolation ne donne pas le même résultat est le cas général, voir [Tre13].

et non un des points extrêmes $\{\mu_G = 2e^{-1}\delta_0, \mu_D = 0\}$ ou $\{\mu_G = 0, \mu_D = 2e^{-1}\delta_0\}$. En implémentant l'extraction des solutions sur la somme des moments

$$y_k^\Sigma := \int_{-1}^0 T_k(t) d\mu_G + \int_0^1 T_k(t) d\mu_D, \quad (4.51)$$

ce manque d'unicité est même transparent.

Remarque 4.18 Pour un degré d donné des polynômes d'interpolation, les conditions semi-définies présentées en §2.3.5 sont nécessaires et suffisantes. La hiérarchie de problèmes semi-définis présentée ci-dessus est bien une hiérarchie d'approximations et non de relaxations comme présentée en §2.3.1. Nous rappelons d'ailleurs qu'aux ordres impairs des polynômes d'interpolation, les relaxations de l'exemple ci-dessus donnent un résultat exact.

4.3 Applications au rendez-vous orbital

Nous appliquons la méthode développée dans ce chapitre au cas du rendez-vous orbital, une des motivations technologiques de la commande impulsionnelle. Ceci permet de comparer la méthode par rapport à une approche directe standard.

4.3.1 Présentation du problème

Nous prenons le cas du rendez-vous orbital dans un champ gravitationnel linéarisé, où l'on veut minimiser la consommation tout en rejoignant deux états en un temps prescrit. Dans ce problème, un satellite « chasseur », commandé, doit rejoindre un satellite « chassé » suivant une trajectoire de référence donnée. Une présentation générale de ce problème peut-être trouvée en [AKZLD11], où une méthode indirecte basée sur le vecteur efficacité⁵ est utilisée pour le résoudre. En prenant comme hypothèse un mouvement Képlérien et une orbite de référence elliptique, le problème peut être découpé en un problème hors-plan à deux états, dont la solution analytique est connue, et un problème plan à quatre états. C'est ce problème plan qui sera étudié par la suite, basé sur les équations de Tschauner-Hempel [TH65].

Le problème de commande optimale associé a donc un vecteur d'état de dimension $n = 4$, composé des positions relatives des satellites dans les composantes \vec{X} et \vec{Z} du repère LVLH [LADBP11] suivies de leur dérivées temporelles, et d'un vecteur de contrôle à $m = 2$ composantes⁶, l'une dans la composante \vec{X} du repère et l'autre dans la composante \vec{Z} .

La dynamique linéarisée est donnée par

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.52)$$

où

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

⁵Anglais : « vecteur efficacité ».

⁶Technologiquement, il y a quatre contrôles si l'on tient compte du sens de poussée des tuyères.

et $A(t) := A_\theta(\theta(t))$ avec

$$A_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 e \cos \theta \left(\frac{1+e \cos \theta}{1-e^2} \right)^3 & -2 \bar{n}^2 e \sin \theta \left(\frac{1+e \cos \theta}{1-e^2} \right)^3 & \dots \\ 2 \bar{n}^2 e \sin \theta \left(\frac{1+e \cos \theta}{1-e^2} \right)^3 & \bar{n}^2 (3+e \cos \theta) \left(\frac{1+e \cos \theta}{1-e^2} \right)^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & 0 & 2\bar{n} \frac{(1+e \cos \theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \\ -2\bar{n} \frac{(1+e \cos \theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Dans ces équations, \bar{n} est le mouvement moyen et e l'excentricité paramétrant l'orbite de référence, tandis que $\theta(t)$, l'anomalie vraie, satisfait les équations de Kepler :

$$\begin{aligned} \bar{n}t &= E(t) - e \sin E(t) \\ \tan \frac{\theta(t)}{2} &= \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \frac{E(t)}{2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

avec $E(t)$ l'anomalie excentrique. Ces équations n'ont pas de solution analytique connue. Il en va de même pour l'intégration du système non forcé.

4.3.2 Application à la mission PRISMA

Pour valider l'approche, nous nous baserons sur la description d'une mission du démonstrateur technologique PRISMA, tiré de [BDGD11]. La manœuvre proposée est posée sur 14.25 périodes orbitales, de 5920s chacune. Pour ce problème, $G(t)$ peut être approchée en dessous de la résolution numérique de 10^{-8} des solveurs semi-définis par un polynôme de degré 100. Ceci permet de résoudre le problème à la précision numérique souhaitée par une relaxation d'ordre 50.

Pour comparaison, nous utilisons une méthode directe tirée de [ML08, LADBP11], où l'on se fixe une grille donnée de temps d'impulsions. Ceci permet d'exploiter les résultats de §4.2.1 pour obtenir un Problème d'optimisation Linéaire (PL). Il est à noter que la qualité de la solution dépend fortement de la grille imposée, et que les solutions d'un tel algorithme sont forcément sub-optimales.

La Table 4.3 reprend les résultats pour l'approche par les moments et la méthode directe s'appuyant sur la programmation linéaire. On constate que l'approche par les moments est légèrement moins rapide, mais permet d'obtenir la solution globale. En appliquant les méthodes d'extraction de solution exposées en §2.3.2, on retrouve la solution donnée par l'approche directe.

4.3.3 Améliorations

Ce problème présente de nombreuses symétries permettant de réduire fortement la taille des approximations polynomiales tout en maintenant la qualité de l'approximation. En

Méthode	J [m/s]	T [s]
PL, grille de 20 points	0.04072	0.2
PL, grille de 200 points	0.03736	0.4
Approche par les moments	0.03736	1.1

TABLE 4.3 – Comparaison entre le coût J et le temps de calcul T entre l’approche par les moments et la Programmation Linéaire pour la mission PRISMA.

effet, une inspection des équations révèle que pour une période orbitale $T := \frac{2\pi}{n}$, $E(t + kT) = E(t) + 2\pi k$, de sorte que $\theta(t + 2\pi k) = \theta(t) + 2\pi k$. Comme $A_\theta(\theta + 2\pi k) = A_\theta(\theta)$, il suffit donc de calculer $F_d(t)$ sur une période orbitale, puisque ces symétries impliquent $F(t + kT) = F(t) F(T)^k$ et donc $G(t + kT) = G(T)^k G(t)$. On découpera ensuite temporellement le problème par période orbitale, de manière similaire à l’Exemple 4.16. Pour les rendez-vous sur plusieurs périodes orbitales, ceci réduit fortement le degré des approximations en jeu. Par exemple, il faut 20 nœuds pour interpoler $\sin(\pi t)$ sur $[-1, 1]$ à la précision machine de 10^{-16} , mais 28 quand on double l’intervalle.

Une seconde particularité du problème peut être exploitée pour faciliter le calcul de $G_d(t)$. En effet, $\text{tr} A(t) = 0$ qui implique par les résultats de §4.2.1 que $\det F(t) = 1$ pour $t \in [a, b]$. L’inversion de $F_d(t)$ peut donc être effectuée sans division matricielle d’interpolations polynomiales, une opération délicate à effectuer.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les *mesures-contrôles* pour les systèmes linéaires. Ceci permet de traiter les phénomènes de concentration, aussi connus sous le nom de contrôles impulsionnels. Le problème de commande optimale est alors relâché en un problème généralisé des moments posé sur les mesures de \mathbb{R} . Ceci permet d’obtenir des relaxations semi-définies nécessaires et suffisantes pour la résolution du problème original, à degré de précision donné. La méthode offre des performances comparables aux approches directes tout en s’affranchissant des problèmes liés à la discrétisation de l’espace temporel. Le prochain chapitre montre comment les résultats de ce chapitre, ainsi que le formalisme des mesures d’occupation introduit au chapitre précédent, permet de traiter les problèmes contraints où l’état rentre de manière non-linéaire.

Chapitre 5

Mesures-contrôles pour les systèmes non-linéaires

Sommaire

5.1	Introduction	71
5.2	Présentation du problème	72
5.3	Équations différentielles régies par les mesures	73
5.4	Vers une instance du PGM	76
5.5	Dualité conique	82
5.6	Exemples	86
5.6.1	Construction pratique d'un problème	86
5.6.2	Contrôle d'attitude	88
5.6.3	Domaine non-convexe	89
5.6.4	Champ de vecteurs non-commutatif	91
5.7	Conclusion	92

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous combinons les résultats des deux chapitres précédents. Du chapitre 4, nous gardons l'idée essentielle de modéliser le contrôle par une mesure, permettant d'absorber naturellement les *effets de concentration*. Du chapitre 3, nous reprenons les *mesures d'occupation* qui permettent d'encoder les trajectoires et les contraintes sur celles-ci. Nous étendons alors les mesures-contrôles en *mesures d'occupation du contrôle* pour capturer ces effets non-linéaires. Il en résulte une formulation très flexible des problèmes de commande optimale affines en les contrôles en tant que Problèmes Généralisés des Moments (PGM), permettant de nombreux problèmes de la littérature, parfois dénommés sous le terme contrôles impulsionsnels ou hybrides.

Survol du chapitre

Dans la section §5.2, le problème de commande optimale traité dans ce chapitre est détaillé. Puis dans §5.3, un concept de solution généralisée pour ces systèmes est détaillé, ce qui permet de relâcher le problème original de commande comme un PGM, comme montré dans §5.4. Ensuite, §5.5 exploite la dualité conique sur les PGM afin d'étudier le lien avec les conditions suffisantes d'optimalité. Enfin, 5.6 détaille l'approche sur plusieurs exemples illustratifs.

5.2 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes de commande optimale suivants :

Problème 5.1 (Contrôle optimal non-borné)

$$J = \inf_{u(\cdot), x(\cdot)} \int_a^b \left(h(t, x(t)) + H(t, x(t)) u(t) \right) dt + h_a(x(a)) + h_b(x(b))$$

t.q. $\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x(t)) + G(t, x(t)) u(t) && \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.}, \\ x(a) &\in \mathbf{X}_a, \\ x(b) &\in \mathbf{X}_b, \\ x(t) &\in \mathbf{X}, \quad \forall t \in [a, b], \\ \|u(t)\|_{L_1} &\leq N_{\text{TV}}, \end{aligned}$

avec les hypothèses :

- (i) $x(t)$ est un vecteur de n états, chacun dans $W^{1,1}([a, b])$;
- (ii) $u(t)$ est un vecteur de m contrôles positifs, chacun dans $L_1^+([a, b])$;
- (iii) Les temps initiaux et finaux $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés, avec $a \leq b$;
- (iv) Coûts et dynamiques sont polynomiaux en leurs arguments : $h(t, \underline{x}), f(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]$, $H(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]^{1 \times m}$, $G(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]^{n \times m}$ et $h_a(x), h_b(x) \in \mathbb{R}[\underline{x}]$;
- (v) Les ensembles \mathbf{X}_a , \mathbf{X}_b et \mathbf{X} respectent l'Hypothèse 2.18 de compacité/représentation.

Remarque 5.2 Nous reprenons la convention de notation du chapitre 3, où les trajectoires $x(t)$ évoluent dans un espace d'état paramétré par \underline{x} , voir la Figure 3.2 p.33.

Remarque 5.3 Pour alléger les notations, les mêmes symboles que pour le Problème 3.1 de commande optimale du chapitre 3 sont utilisés pour f , h , h_a et h_b dans un contexte légèrement différent. Dans ce chapitre, aucun de ces objets ne dépend de $u(t)$, et le problème de commande optimale se fait sur un horizon temporel fixe, de sorte que h_a et h_b ne dépendent pas du temps.

Remarque 5.4 *La dynamique f et le coût h pourraient aussi dépendre d'un contrôle borné comme au chapitre 3. Dans le même souci d'alléger les notations, ce cas n'est pas présenté car son intégration est une application directe des résultats du chapitre 3. Par contre, une dépendance de H et G envers ces contrôles demande une extension non-triviale des résultats de ce chapitre.*

Remarque 5.5 *Les hypothèses de dynamiques polynomiales (iv) et d'ensembles compacts (v) impliquent l'unicité locale des trajectoires pour un contrôle ordinaire donné, puisque la dynamique est alors Lipschitz continue.*

Dans ce problème, les contrôles rentrent de manière affine, sans qu'aucune contrainte sur leurs valeurs ne soit imposée si ce n'est leur positivité. Les contrôles à valeurs arbitraires se traitent comme au chapitre précédent, comme étant la différences de deux contrôles positifs. Le chapitre 4 montre que même dans le cas des systèmes linéaires, l'infimum du Problème 5.1 n'est généralement pas atteint à cause des *effets de concentration*. Il faut donc d'abord définir un concept de solution généralisée pour les dynamiques telles qu'énoncées pour le Problème 5.1.

5.3 Équations différentielles régies par les mesures

Dans cette section, nous explorons certains concepts liés aux équations différentielles régies par les mesures¹. Supposons que, comme au chapitre précédent, il faille intégrer une équation différentielle ordinaire du type

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5.1)$$

sur l'intervalle de temps $[a, b]$. En considérant que $u(t) \in L_1$, la solution du problème de commande en norme minimale du système n'est en général pas atteinte. Le chapitre précédent propose alors d'intégrer l'Équation Différentielle Ordinaire (EDO) sans terme de forçage, et ensuite, d'effectuer le plongement $u(t) dt \rightarrow \nu(dt) \in \mathcal{M}$ pour retrouver cette propriété. Pour les systèmes non-linéaires de la forme

$$\dot{x} = f(t, x(t)) + G(t)u(t), \quad (5.2)$$

on ne peut généralement pas intégrer l'EDO de la sorte, et on pourrait donc souhaiter généraliser le concept de solution de l'équation différentielle en effectuant directement le plongement vers les mesures pour celle-ci. On définit alors les *mesures-contrôles*² comme au chapitre précédant par des mesures $\nu \in [\mathcal{M}^+([a, b])]^m$ telles que (5.2) se généralise par [Sch65] :

$$dx = f(t, x(t)) dt + G(t)\nu(dt) \quad (5.3)$$

où $x(t) \in BV([a, b])^n$ est une trajectoire à variation bornée, et l'EDO s'interprète au sens des distributions, c'est-à-dire que pour toute fonction-test lisse à support compact $v(t)$, on a la relation :

$$\int v(t) dx(t) = - \int x(t) \dot{v}(t) dt. \quad (5.4)$$

¹Anglais : « measure-driven differential equations ».

²Nous nous limiterons à cette terminologie pour ne pas confondre avec les contrôles généralisés introduits au chapitre 3.

On peut alors montrer [Sch65] que $x(t)$ satisfait (5.3) si et seulement si

$$x(t) = x(a^-) + \int_a^t f(s, x(s)) ds + \int_a^t G(s) \nu(ds). \quad (5.5)$$

Le théorème de décomposition de Lebesgue [Kol70, §33.3] montre que

$$\nu = \underbrace{\nu^{\text{AC}} + \nu^{\text{SC}}}_{:= \tilde{\nu}} + \nu^{\text{SD}} \quad (5.6)$$

où, en suivant la terminologie de [AFP00, Chap. 3], $\tilde{\nu}$ est la partie diffuse de ν , elle-même composée d'une partie absolument continue ν^{AC} et d'une partie singulière continue ν^{SC} (de type Cantor), tandis que ν^{SD} est la partie singulière discrète, supportée sur un ensemble \mathbf{S} de cardinalité au plus dénombrable d'instants de saut/d'impulsion t_i , $i \in \mathbf{S}$. $x(t)$ possède donc une limite par la gauche $x(t^-)$ et par la droite $x(t^+)$ en tout point, et que celles-ci sont égales sauf aux instants de saut t_i . On remarque également qu'on retrouve exactement la formulation du Problème 5.1 en se restreignant aux mesures ν absolument continues, puisqu'alors il existe une fonction $u(t)$ mesurable telle que

$$\nu^{\text{AC}}(dt) = u(t) dt. \quad (5.7)$$

Donc, en considérant des mesures-contrôles ν généraux, on traite dans un même formalisme contrôles continus et impulsions, ce qui rajoute une utilité pratique à procéder de la sorte.

Remarque 5.6 *Dans ce mémoire, nous ne normaliserons pas spécifiquement l'espace des fonctions à variation bornée en imposant la continuité à droite ou à gauche, et garderons donc pour plus de clarté les notations $x(t^-)$ et $x(t^+)$ pour respectivement la limite par la gauche et par la droite de ces fonctions quand cela est nécessaire. Pour les points finaux, on prendra par hypothèse l'existence de $x(a^-)$ et $x(b^+)$, par exemple en prolongeant les fonctions en dehors de l'intervalle par une constante.*

Cette approche permet déjà de relâcher bon nombre de systèmes comme un PGM [CAHL12], mais il serait souhaitable de l'étendre aux systèmes où la matrice G dépend aussi de l'état. Comme la trajectoire est discontinue précisément là où le contrôle est purement impulsionnel, il est nécessaire pour étendre (5.3), hormis le cas particulier où G satisfait certaines conditions permettant d'appliquer le théorème de Frobenius [BP07, Ch. 10], de définir un concept de solution étendue permettant d'interpréter des expressions telles que $G(t, x(t)) \nu(dt)$ lors des impulsions. L'idée cruciale vient de la *complétion de graphe* introduite en [BR88], proposant d'étendre la trajectoire « lors » des sauts de manière continue, voir Figure 5.1.

A chaque $t_i \in \mathbf{S}$, on définit un intervalle temporel factice

$$\mathbf{T}_i = [0, \|\nu(\{t_i\})\|_1] \quad (5.8)$$

parcouru par ϑ , le « temps rapide », et on lui associe un vecteur de fonctions mesurables $\chi[t_i](\vartheta) : \mathbf{T}_i \rightarrow [0, 1]^m$ tel que

$$\sum_{j=1}^m |\chi_j(\vartheta)|_1 := |\chi(\vartheta)|_1 = 1, \quad \forall \vartheta \in \mathbf{T}_i \quad (5.9)$$

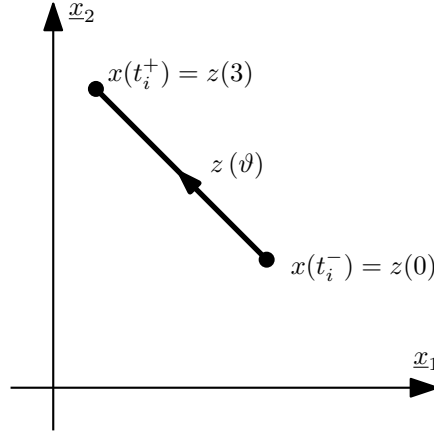


FIGURE 5.1 – Exemple de complétion de graphe, ici le cas canonique, pour une amplitude d'impulsion de 3.

et

$$\int_{\mathbf{T}_i} \chi(\vartheta) d\vartheta = \nu(\{t_i\}). \quad (5.10)$$

On définit alors selon [DS10, Def. 1], pour les mesures-contrôles dans le cône des mesures positives :

Définition 5.7 (Solution des dynamiques impulsionnelles) Soit $\nu \in [\mathcal{M}^+([a, b])]^m$ et $\{\chi[t_i]\}$ définis ci-dessus. Une solution de l'équation différentielle régie par les mesures

$$dx = f(t, x(t)) dt + G(t, x(t)) \nu(dt) \quad (5.11)$$

est une fonction à $x(t) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$x(t^+) = x(a^-) + \int_a^t f(s, x(s)) ds + \int_a^t G(s, x(s)) \tilde{\nu}(ds) + \sum_{t_i \in \mathbf{S}, t_i \leq t} (x(t_i^+) - x(t_i^-)) \quad (5.12)$$

où $x(t_i^+)$ et $x(t_i^-)$ sont liés par la solution du système limite³

$$\dot{z}(\vartheta) = G(t_i, z(\vartheta)) \chi(\vartheta), \quad \vartheta \in \mathbf{T}_i \quad (5.13)$$

$$z(0) = x(t_i^-), \quad z(\|\nu(\{t_i\})\|_1) = x(t_i^+). \quad (5.14)$$

La construction ci-dessus peut être interprétée de la façon suivante. Aux sauts, le temps usuel est « suspendu », et on intègre alors la trajectoire par le temps rapide ϑ comme en (5.13). L'équation (5.9) impose que pendant tout cet intervalle de temps rapide, au moins une des mesures-contrôles est « active ». Si plusieurs mesures sont actives, leur action doit alors être répartie.

On montre [DS10] que le concept de solution de la Définition 5.7 est la fermeture convexe (dans le sens de la convergence *-faible des fonctions à variation bornée) des trajectoires $x(t)$ absolument continues comme considérées dans le Problème 5.1.

³Anglais : « limiting system ».

5.4 Vers une instance du PGM

En suivant le concept de solution généralisée de la Définition 5.7, on relâche le Problème 5.1 par le

Problème 5.8 (Relaxation avec mesures-contrôles)

$$\begin{aligned}
 J_R = \inf_{\nu(dt), \{z[t_i]\}_{t_i \in \mathbf{S}}} & \int_a^b h(t, x(t)) dt + \int_a^b H(t, x(t)) \nu(dt) + h_a(x(a)) + h_b(x(b)) \\
 \text{t.q.} & dx = f(t, x(t)) dt + G(t, x(t)) \nu(dt) \quad \text{selon la Définition 5.7,} \\
 & \|\nu\|_{\text{TV}} \leq N_{\text{TV}}, \\
 & x(a) \in \mathbf{X}_a, \\
 & x(b) \in \mathbf{X}_b, \\
 & x(t) \in \mathbf{X}, \quad \forall t \in [a, b] \setminus \mathbf{S}, \\
 & z(\vartheta) \in \mathbf{X}, \quad \forall \vartheta \in \mathbf{T}_i, \forall t_i \in \mathbf{S}.
 \end{aligned}$$

Cette section montre comment le Problème 5.8 peut être lui-même relâché en un problème généralisé des moments grâce à l'utilisation de mesures d'occupation, comme au chapitre 3.

A cette fin, nous définissons le noyau stochastique, ou mesure conditionnelle ξ , par :

$$\xi(\mathbf{B}|t) = \begin{cases} I_{\mathbf{B}}(x(t)), & \forall t \in [0, T] \setminus \mathbf{S} \\ \int_{\mathbf{T}_i} \frac{I_{\mathbf{B}}(z(\vartheta))}{\|\nu(\{t_i\})\|_1} d\vartheta, & \forall t_i \in \mathbf{S} \end{cases} \quad (5.15)$$

pour tout $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$. Cette mesure donne à presque tout instant la probabilité de trouver la trajectoire dans un ensemble \mathbf{B} donné. Lors des arcs continus, $\xi(\cdot|t)$ est donc la mesure de Dirac supportée en $x(t)$ (c'est le cas en t_1 à la Figure 5.2), tandis que lors des sauts, $\xi(\cdot|t)$ est une « mesure d'occupation du temps rapide ». Elle mesure donc pour chaque \mathbf{B} le temps rapide que la complétion de graphe y passe, voir le cas en t_2 à la Figure 5.2 pour un espace d'état unidimensionnel et la Figure 5.3 pour le cas général. Aux sauts, $\xi(\cdot|t)$ est bien une mesure de probabilité vu sa normalisation par $\|\nu(\{t_i\})\|_1$.

Le noyau stochastique ξ possède par construction, pour toute fonction-test continûment différentiable $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\forall t \in [a, b] \setminus \mathbf{S}$, les propriétés suivantes :

$$v(x(t)) = \int_{\mathbf{X}} v(\underline{x}) \xi(d\underline{x}|t), \quad (5.16)$$

de manière analogue aux mesures d'occupation du temps du chapitre 3 (voir Définition 3.15). La propriété correspondante lors des sauts se fait en remarquant que le système limite (5.13)–(5.14) se traite comme au chapitre 3 pour donner, pour toute fonction test

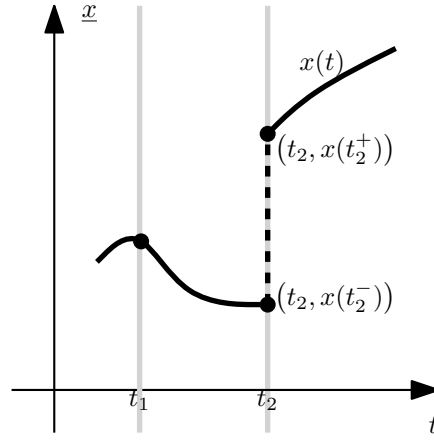


FIGURE 5.2 – Illustration de ξ . En t_1 , son support est le point $x(t_1)$, tandis qu'en t_2 , son support est le segment de droite matérialisant le saut.

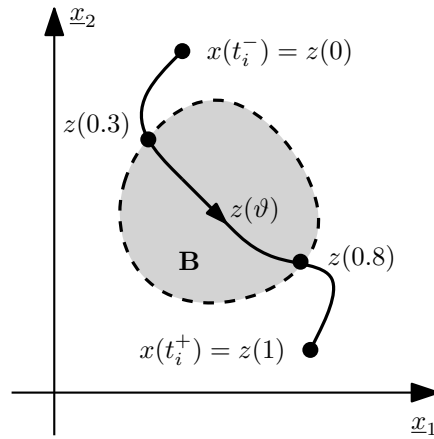


FIGURE 5.3 – Illustration de $z(\vartheta)$ aux instants d'impulsions pour un espace d'état bidimensionnel et une impulsion unitaire. On a ici que $\xi(B|t_i) = 0.8 - 0.3$.

$v \in C_1(\mathbf{X})$:

$$\begin{aligned} v(x(t_i^+)) - v(x(t_i^-)) &= v(z(\|\{\nu_i\}\|_1)) - v(z(0)) \\ &= \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) G(t_i, \underline{x}) \underbrace{\left(\int_{\mathbf{T}_i} \chi(\vartheta) d\vartheta \right)}_{\nu(\{t_i\})} \xi(d\underline{x}|t_i) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ces propriétés permettent de définir rigoureusement les mesures d'occupation, qui comme au chapitre 3, seront les variables de décision du problème généralisé sur les moments associé au Problème 5.8.

Soit p un vecteur paramétrant une solution admissible pour le Problème 5.8 :

$$p := \left\{ \nu(dt), \{z[t_i]\}_{t \in \mathbf{S}}, x(t) \right\} \quad (5.18)$$

On définit alors :

Définition 5.9 (Mesure d'occupation de la trajectoire) *La mesure d'occupation du temps par la trajectoire $x(t)$, qui mesure l'occupation de $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \subset [a, b] \times \mathbf{X}$ par le graphe $(t, x(t))$ de cette trajectoire, est définie par :*

$$\mu[p](\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{A}} \xi(\mathbf{B} | t) dt \quad (5.19)$$

$\forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}([a, b]), \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$.

On a donc que $\mu(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est le temps que passe $(t, x(t))$ sur l'ensemble $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, d'où son nom, voir l'exemple de la Figure 5.4. La définition est évidemment similaire à la Définition 3.15 du chapitre 3, sauf que l'espace de contrôle n'est ici pas mesuré. On remarque que la complétion de graphe aux sauts n'a aucune influence sur la valeur de μ , car par construction, pour toute fonction test continue $v \in C([a, b] \times \mathbf{X})$, on a :

$$\int_{[a, b] \times \mathbf{X}} v(t, \underline{x}) d\mu(t, \underline{x}) = \int_a^b v(t, x(t)) dt. \quad (5.20)$$

Définition 5.10 (Mesure d'occupation du contrôle) *On définit la mesure d'occupation du contrôle par :*

$$\omega[p](\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{A}} \xi(\mathbf{B} | t) \nu(dt) \quad (5.21)$$

$\forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}([a, b])$ et $\forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, avec ξ défini comme en (5.15).

De la même manière que la mesure d'occupation $\mu(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ mesure le temps passé par le graphe d'une trajectoire, $\omega(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ mesure l'intégrale du contrôle dépensé pour accomplir la trajectoire sur $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, voir l'exemple de la Figure 5.4.

Les deux dernières mesures d'occupation sont les analogues directs des Définitions 3.12 et 3.14 du chapitre 3 :

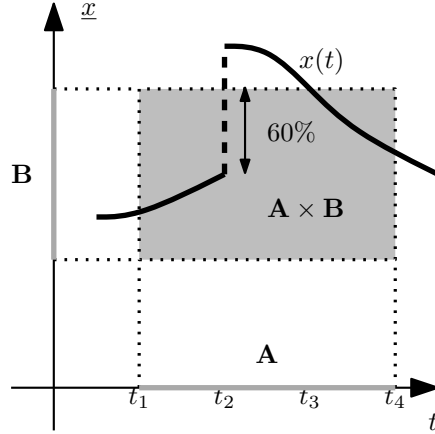


FIGURE 5.4 – Exemple de mesures d’occupation. Ici, $\mu(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = t_2 - t_1 + t_4 - t_3$ et $\omega(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nu([t_1, t_2]) + 0.6\nu(\{t_2\}) + \nu([t_3, t_4])$

Définition 5.11 (Mesure d’occupation du point final) *La mesure d’occupation du point final est définie par :*

$$\mu_b[p](\mathbf{B}) = I_{\mathbf{B}}(x(b)), \quad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_b). \quad (5.22)$$

Par construction, pour toute fonction continue $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbf{X}_b} v(\underline{x}) d\mu_b(\underline{x}) = v(x(b)). \quad (5.23)$$

Définition 5.12 (Mesure d’occupation du point initial) *La mesure d’occupation du point initial est définie par :*

$$\mu_a[p](\mathbf{B}) = I_{\mathbf{B}}(x(a)), \quad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_a). \quad (5.24)$$

Par construction, pour toute fonction continue $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbf{X}_a} v(\underline{x}) d\mu_a(\underline{x}) = v(x(a)). \quad (5.25)$$

Le théorème suivant montre la relation entre les mesures qui viennent d’être définies :

Théorème 5.13 *Soit une trajectoire admissible paramétrée par p comme en (5.18). Alors, les mesures $\mu[p]$, $\omega[p]$, $\mu_a[p]$ et $\mu_b[p]$ satisfont la relation linéaire*

$$\langle v(b, \underline{x}), \mu_b \rangle - \langle v(a, \underline{x}), \mu_a \rangle = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f, \mu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} G, \omega \right\rangle \quad (5.26)$$

pour toute fonction-test $v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]$.

Preuve En évaluant une telle fonction-test le long d'une trajectoire admissible, on obtient en utilisant le théorème de dérivation des fonctions à variation bornée composées [AFP00, Th. 3.96] et (5.12) :

$$\begin{aligned} \int_a^b dv(t, x(t)) &= v(b, x(b^+)) - v(a, x(a^-)) \\ &= \underbrace{\int_a^b \frac{\partial v}{\partial t} dt}_{A_1} + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} d\tilde{x}}_{A_2} + \underbrace{\sum_{t_i \in J} v(t_i, x(t_i^+)) - v(t_i, x(t_i^-))}_{A_3}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nous allons exprimer l'intégration temporelle ci-dessus par une intégration spatiale par l'intermédiaire des mesures d'occupation.

Étant donné (5.23), le membre de gauche de (5.26) est égal au membre de gauche de (5.27). Pour le membre de droite, on observe que par (5.16) et (5.19) :

$$A_1 = \int_a^b \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial v}{\partial t} \xi(d\underline{x}|t) dt = \langle \frac{\partial v}{\partial t}, \mu \rangle. \quad (5.28)$$

En utilisant (5.11) et le fait que $x(t)$ est diffus lorsque $\nu(dt)$ l'est, A_2 est donné par

$$A_2 = \int_a^b \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, x(t)) f(t, x(t)) dt + \int_a^b \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, x(t)) G(t, x(t)) \tilde{\nu}(dt) \quad (5.29)$$

$$= \langle \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, \underline{x}) f(t, \underline{x}), \mu \rangle + \int_a^b \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(t, \underline{x}) G(t, \underline{x}) \xi(d\underline{x}|t) \tilde{\nu}(dt), \quad (5.30)$$

où la dernière égalité utilise à nouveau (5.16) ainsi que les définitions (5.19) et (5.15). Enfin, injecter (5.17) dans A_3 donne

$$A_3 = \sum_{t_i \in \mathbf{S}} \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) G(t_i, \underline{x}) \nu(\{t_i\}) \xi(d\underline{x}|t_i) \quad (5.31)$$

$$= \int_a^b \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) G(t, \underline{x}) \xi(d\underline{x}|t) \nu^{\text{SD}}(dt). \quad (5.32)$$

Puisque $\nu = \tilde{\nu} + \nu^{\text{SD}}$, (5.21) mène au résultat donné. ■

Remarque 5.14 Les mesures étant définies sur des sous-ensembles compacts d'espaces euclidiens, se limiter aux fonctions tests polynomiales est suffisant, par densité.

Le théorème ci-dessus permet de relâcher le Problème 5.8 par un problème généralisé des moments, en recherchant parmi toutes les mesures satisfaisant (5.26) au lieu des mesures d'occupation définies précédemment :

Problème 5.15 (Problème généralisé des moments associé)

$$\begin{aligned}
J_M &= \inf_{\mu, \omega, \mu_a, \mu_b} \langle h, \mu \rangle + \langle H, \omega \rangle + \langle h_a, \mu_a \rangle + \langle h_b, \mu_b \rangle \\
\text{t.q.} \quad &\langle v(b, \underline{x}), \mu_b \rangle - \langle v(a, \underline{x}), \mu_a \rangle = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f, \mu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} G, \omega \right\rangle \\
&\langle 1, \mu_a \rangle = \langle 1, \mu_b \rangle = 1, \\
&\sum_{j=1}^m \langle 1, \omega_j \rangle \leq N_{\text{TV}}, \\
&\mu_a \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_a), \\
&\mu_b \in \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_b), \\
&\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K} := [a, b] \times \mathbf{X}), \\
&\omega \in [\mathcal{M}^+(\mathbf{K})]^m.
\end{aligned}$$

La relation entre les Problèmes 5.1, 5.8 et 5.15 est donc la suivante :

Lemme 5.16

$$J \geq J_R \geq J_M. \quad (5.33)$$

L'exemple suivant montre que comme au chapitre 3, il peut y avoir un saut de relaxation strict entre les Problèmes 5.1 et 5.8, c'est-à-dire $J > J_R$:

Exemple 5.17 (Saut de relaxation) Soit la dynamique

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 u \\
\dot{y} &= u
\end{aligned} \quad (5.34)$$

contrainte par $x(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ et $u(t) \geq 0$. En relâchant la trajectoire selon la Définition 5.7 :

$$dx = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \nu(dt) \quad (5.35)$$

$$dy = \nu(dt) \quad (5.36)$$

avec $\nu(dt) \in \mathcal{M}^+$, il apparaît très vite que tout le contrôle nécessaire pour déplacer y de 0 à 1 doit être appliqué en $t = \frac{1}{2}$ si $x(t)$ doit rester identiquement nul. Le seul contrôle relâché admissible est donc $\nu(dt) = \delta_{\frac{1}{2}}(dt)$. Néanmoins, toute trajectoire absolument continue approchant cette trajectoire généralisée violera légèrement la contrainte $x(t) = 0$ et est donc non-admissible. Pour tout problème de commande optimale mû par la dynamique (5.35) où le coût est fini, un saut de relaxation – ici infini – existe.

L'exemple ci-dessus utilise des contraintes fortes, au point qu'elles conditionnent entièrement la trajectoire. En s'inspirant des développements du chapitre 3, on peut donc penser qu'un saut de relaxation entre les Problèmes 5.1 et 5.8 ne peut avoir lieu que dans des conditions bien spécifiques et non-génériques :

Question ouverte 5.18 *Quelles sont exactement les conditions permettant de garantir l'absence de saut de relaxation entre 5.1 et 5.8 ?*

Enfin, vu les propriétés de fermeture des trajectoires $x(t)$ dans le sens de la convergence $*$ -faible, il est très probable qu'il n'y ait pas de saut de relaxation entre les problèmes 5.8 et 5.15. Ceci demanderait néanmoins de considérer aussi les dynamiques rapides $z(\vartheta)$ complétant le graphe de $x(t)$.

Question ouverte 5.19

$$J_R = J_M ? \quad (5.37)$$

Nous clôturons cette section par une discussion sur la flexibilité de la méthode quant à l'espace d'état autorisé. Dans le Problème 5.1 de commande optimale, les états sont contraints à rester dans un ensemble \mathbf{X} donné, et les contrôles sont libres. Lors de sa relaxation grâce aux contrôles-mesures, le Problème 5.8 introduit les complétions de graphe lors des sauts, que l'on contraint naturellement dans l'ensemble \mathbf{X} . Enfin, le Problème 5.15 généralisé des moments introduit deux mesures d'occupation : μ pour mesurer le temps et ω pour l'intégrale du contrôle. Ces mesures sont à nouveau posées sur $[a, b] \times \mathbf{X}$.

Néanmoins, rien n'empêche de différencier l'espace sur lequel ces mesures sont posées. Prenons l'exemple d'un satellite dont on souhaiterait activer les tuyères uniquement lorsque celui-ci est dans le champ de vision d'une station au sol, pour des raisons de sécurité. On pourrait dès lors poser ω sur un domaine \mathbf{X}' strictement plus petit que celui de μ . Cela revient à imposer dans le problème initial de commande une contrainte du type $x(t) \in \mathbf{X}'$ quand $u(t) \neq 0$ pour presque tout t . On pourrait même différencier chacun des contrôles de manière individuelle.

On pourrait aussi, de manière plus surprenante, agrandir l'espace \mathbf{X}' sur lequel ω est posée. En effet, vu la définition (5.19) de μ , cette dernière est « aveugle » aux parties singulières de ν , la marginale par rapport au temps de ω . Agrandir \mathbf{X}' permettrait d'intégrer des contraintes que l'on autorise à transgresser transitoirement, pour un intervalle de temps asymptotiquement négligeable. A la limite, on a bien sûr un comportement proche d'un contrôle purement impulsif. C'est le cas de l'exemple très domestique du lave-linge, qui opère généralement à une vitesse de rotation du tambour en dessous de la première fréquence de résonance. Pour un essorage efficace, il est néanmoins nécessaire de passer à une vitesse de rotation bien supérieure, et on autorise donc la machine à passer un transitoire où elle vibre énormément. La formulation exposée dans ce chapitre permet aussi de traiter ce cas.

5.5 Dualité conique

En inspectant les données du Problème 5.15, on remarque directement qu'elles satisfont l'Hypothèse 2.40, de sorte que :

Proposition 5.20 *Si le Problème 5.15 possède une solution admissible, alors il existe une solution optimale $\{\mu_a^*, \mu_b^*, \mu^*, \omega^*\}$ atteignant l'infimum du problème.*

Preuve Il suffit donc selon l'Hypothèse 2.40 de trouver un $a_i > 0$ pour chaque mesure contraignant les moments de chacune d'elles par

$$\langle a_i, \mu_i \rangle = b_i. \quad (5.38)$$

Comme μ_a et μ_b sont des mesures de probabilité, elles satisfont cette condition trivialement ($a_i = 1$). Pour μ , on peut choisir la fonction test $v(t, \underline{x}) = t$ dans la dynamique faible qui impose $\langle 1, \mu \rangle \leq b - a$. Enfin, pour ω , la contrainte de variation totale impose précisément cette condition. ■

La solution du PGM étant atteinte, on peut donc souhaiter écrire un problème dual et en déduire des conditions suffisantes par complémentarité. On remarque qu'on peut mettre le Problème 5.15 sous la forme d'un problème primal sous forme canonique de dualité conique, comme rappelé en §2.3.3, grâce aux définitions suivantes :

- On définit par $s_{TV} \in \mathbb{R}^+$ la variable de relèvement telle que

$$\sum_{j=1}^m \langle 1, \omega_j \rangle + s_{TV} = N_{TV}, \quad (5.39)$$

pour obtenir un problème sous forme canonique, c'est-à-dire avec seulement des contraintes égalitaires ;

- On définit l'ensemble $\mathbf{K} := [a, b] \times \mathbf{X}$;
- La variable de décision x_p du primal conique est un vecteur

$$x_p := \begin{bmatrix} \mu & \omega & \mu_a & \mu_b & s_{TV} \end{bmatrix} \in E_p \quad (5.40)$$

avec

$$E_p := \mathcal{M}(\mathbf{K}) \times [\mathcal{M}(\mathbf{K})]^m \times \mathcal{M}(\mathbf{X}_a) \times \mathcal{M}(\mathbf{X}_b) \times \mathbb{R} \quad (5.41)$$

où les mesures sont munies de la topologie *-faible ;

- Le coût est donné par

$$c := \begin{bmatrix} h & H & h_a & h_b & 0 \end{bmatrix} \in F_p \quad (5.42)$$

avec

$$F_p := C(\mathbf{K}) \times [C(\mathbf{K})]^m \times C(\mathbf{X}_a) \times C(\mathbf{X}_b) \times \mathbb{R}, \quad (5.43)$$

où les polynômes sont ici vus comme un sous-ensemble des fonctions continues ;

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times F_p \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bien une paire duale définie par l'intégration de fonctions continues par les mesures finies et le produit scalaire usuel sur \mathbb{R} ;
- Le cône \mathbf{V} est donc

$$\mathbf{V} := \mathcal{M}^+(\mathbf{K}) \times [\mathcal{M}^+(\mathbf{K})]^m \times \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_a) \times \mathcal{M}^+(\mathbf{X}_b) \times \mathbb{R}^+, \quad (5.44)$$

et son dual \mathbf{V}^* est défini par

$$\mathbf{V}^* := C^+(\mathbf{K}) \times [C^+(\mathbf{K})]^m \times C^+(\mathbf{X}_a) \times C^+(\mathbf{X}_b) \times \mathbb{R}^+; \quad (5.45)$$

- Le vecteur de contraintes b se définit par :

$$b := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & N_{TV} \end{bmatrix} \in E_d \quad (5.46)$$

avec

$$E_d := [C_1(\mathbf{K})]^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (5.47)$$

- On définit l'opérateur⁴ $\mathcal{L}^* : C_1(\mathbf{K}) \rightarrow C(\mathbf{K}) \times [C(\mathbf{K})]^m \times C(\mathbf{X}_a) \times C(\mathbf{X}_b)$ défini par

$$w \mapsto \mathcal{L}^* w := \left[-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} f, -\frac{\partial w}{\partial t} G, -w, w \right]; \quad (5.48)$$

et son opérateur adjoint $\mathcal{L} : \mathcal{M}(\mathbf{K}) \times [\mathcal{M}(\mathbf{K})]^m \times \mathcal{M}(\mathbf{X}_a) \times \mathcal{M}(\mathbf{X}_b) \rightarrow [C_1(\mathbf{K})]^*$ défini par

$$\langle \mathcal{L}^* w, \begin{bmatrix} \mu & \omega & \mu_a & \mu_b \end{bmatrix} \rangle = \langle w, \mathcal{L} \begin{bmatrix} \mu & \omega & \mu_a & \mu_b \end{bmatrix} \rangle \quad (5.49)$$

- La variable de décision x_d du dual conique est un vecteur

$$x_d := \begin{bmatrix} w & \gamma_a & \gamma_b & \gamma_{TV} \end{bmatrix} \in F_p \quad (5.50)$$

avec

$$F_p := C_1(\mathbf{K}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (5.51)$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_d : E_d \times F_d \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bien une paire duale entre E_d et F_d ;

Le Problème 5.15 s'écrit synthétiquement, voir §2.3.3, par :

$$\begin{aligned} J_M &= \inf_{x_p} \langle x_p, c \rangle_p \\ &\text{t.q. } \mathcal{A} x_p = b, \\ &\quad x_p \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

et son dual conique associé est

$$\begin{aligned} D &= \sup_{x_d} \langle b, x_d \rangle_d \\ &\text{t.q. } c - \mathcal{A}^* x_d \in \mathbf{V}^* \\ &\quad x_d \in E_d. \end{aligned} \quad (5.53)$$

De manière détaillée, on obtient :

⁴Cette notation présuppose que $\mathbf{X}_a \subset \mathbf{X}$ et $\mathbf{X}_b \subset \mathbf{X}$ pour simplifier l'écriture, mais on peut bien sûr par hypothèse poser l'espace de départ de l'opérateur sur un ensemble compact dont \mathbf{X} , \mathbf{X}_a et \mathbf{X}_b seraient des sous-ensembles.

Problème 5.21 (Problème dual associé)

$$\begin{aligned}
P &= \sup_{w, \gamma_a, \gamma_b, \gamma_{\text{TV}}} \gamma_a + \gamma_b + \gamma_{\text{TV}} \\
\text{t.q.} \quad & h + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} f \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}, \\
& H + \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} G + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \gamma_{\text{TV}} \geq 0, \quad \forall (t, \underline{x}) \in \mathbf{K}, \\
& h_a(\underline{x}) + w(a, \underline{x}) - \gamma_a \geq 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbf{X}_a, \\
& h_b(\underline{x}) - w(b, \underline{x}) - \gamma_b \geq 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbf{X}_b, \\
& \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}, \\
& \gamma_{\text{TV}} \in \mathbb{R}^+, \\
& w(t, \underline{x}) \in C_1(\mathbf{K}).
\end{aligned}$$

Proposition 5.22 *Supposons qu'il existe un vecteur de mesures admissibles pour le Problème 5.15. Alors, il n'y a pas de saut de dualité, soit*

$$D = J_M. \quad (5.54)$$

Preuve Selon le Théorème 2.35, il faut donc prouver la fermeture dans $\mathbb{R} \times E_d$ de

$$\mathbf{R} := \{(\langle x_p, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p) : x_p \in \mathbf{V}\}. \quad (5.55)$$

On adapte la preuve similaire présentée en §3.5. Pour démontrer la fermeture de R , on peut par exemple montrer que tous les points d'accumulation de $(\langle x_p^{(n)}, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p^{(n)})$ pour une suite quelconque de $x_p^{(n)}$ appartiennent à \mathbf{R} .

On remarque d'abord que toute suite $x_p^{(n)}$ est bornée selon les mêmes arguments que la preuve de la proposition 5.20. Toute suite $x_p^{(n)}$ a donc une sous-suite convergente, les mesures étant supportées sur des ensembles compacts.

L'opérateur \mathcal{L} est continu pour la topologie forte de $C_1(\mathbf{K})$ et $C(\mathbf{K}) \times [C(\mathbf{K})]^m \times C(\mathbf{X}_a) \times C(\mathbf{X}_b)$, ainsi que ses topologies faibles associées. L'opérateur \mathcal{A} est donc *-faiblement continu, et la suite $(\langle x_p^{(n)}, c \rangle_p, \mathcal{A}x_p^{(n)})$ converge donc dans $\mathbb{R} \times E_d$ à sous-suite près. ■

Comme en §3.5, le suprémum du dual n'est pas nécessairement atteint, mais on garantit par complémentarité l'existence d'une suite $x_d^{(n)}$ telle que

$$\langle x_p^*, c - \mathcal{A}^* x_d^{(n)} \rangle_p \rightarrow 0 \quad (5.56)$$

sur le support de x_p^* , c'est-à-dire le long des trajectoires et des complétions de graphe selon la Définition 5.7.

5.6 Exemples

5.6.1 Construction pratique d'un problème

L'exemple suivant illustre la construction de la première relaxation semi-définie pour un exemple simple. Soit le problème :

$$J = \inf_{u(t)} \int_0^2 x^2(t) dt \quad (5.57)$$

tel que

$$\dot{x}(t) = u^+(t) - u^-(t), \quad (5.58)$$

$$x(0) = 1, \quad x(2) = \frac{1}{2}, \quad (5.59)$$

$$x^2(t) \leq 1, \quad (5.60)$$

$$u^+(t), u^-(t) \in \mathbb{R}^+. \quad (5.61)$$

La solution optimale de ce problème consiste à appliquer une impulsion négative à l'instant initial pour rejoindre le régime $x(t) = 0$, et de s'en écarter à l'instant final par une impulsion dans le sens opposé pour respecter la contrainte d'état finale.

En injectant les données du problème $h = x^2$, $H^\pm = 0$, $f = 0$ and $G^\pm = 1$ dans le Problème 5.15, et en utilisant le fait que pour ce problème contraint aux deux bouts, $\mu_a = \delta_1(d\underline{x})$ et $\mu_b = \delta_{\frac{1}{2}}(d\underline{x})$, le problème généralisé sur les moments s'écrit :

$$J_M = \inf_{\mu, \omega^+, \omega^-} \langle \underline{x}^2, \mu \rangle \quad (5.62)$$

tel que, $\forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}]$,

$$v(2, \frac{1}{2}) - v(0, 1) = \langle \frac{\partial v}{\partial t}, \mu \rangle + \langle \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}, \omega^+ \rangle - \langle \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}, \omega^- \rangle, \quad (5.63)$$

$$\mu, \omega^+, \omega^- \in \mathcal{M}^+, \quad (5.64)$$

$$\text{supp } \mu, \text{supp } \omega^+, \text{supp } \omega^- \subset \mathbf{K}, \quad (5.65)$$

$$\mathbf{K} := \left\{ (t, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{array}{l} 1 - \underline{x}^2 \geq 0 \\ t(2 - t) \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (5.66)$$

La dernière équation définissant \mathbf{K} est une des caractérisations semi-algébriques possibles de $t \in [0, 2]$.

Considérons la construction de la première relaxation semi-définie de (5.62)–(5.66) selon §2.3.1, en définissant, pour les mesures $\tau = \{\mu, \omega^+, \omega^-\}$, l'indexation des moments par

$$y_{ij}^\tau := \langle t^i \underline{x}^j, \tau \rangle, \quad i, j \in \mathbb{N}. \quad (5.67)$$

Cette relaxation a comme variable de décision les moments y_{ij} tels que $i + j \leq 2$, puisque le coût (5.62) et les contraintes (5.66) sont quadratiques. Étant donné (5.67), le coût (5.62) se réécrit simplement comme :

$$J_M^1 = \langle \underline{x}^2, \mu \rangle = y_{02}^\mu. \quad (5.68)$$

Pour la dynamique (5.58) et les conditions aux bouts (5.59), il suffit de considérer les fonctions-tests de la forme $v(t, x) = t^i \underline{x}^j$, avec $i + j \leq 3$. Par exemple, pour la cinquième fonction-test dans l'ordre lexicographique gradué $v_5 = t\underline{x}$, (5.63) se réduit à

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 1 = \langle \underline{x}, \mu \rangle + \langle t, \omega^+ \rangle - \langle t, \omega^- \rangle \quad (5.69)$$

et donc à la contrainte sur les moments

$$2 = y_{01}^\mu + y_{10}^{\omega^+} - y_{10}^{\omega^-}. \quad (5.70)$$

On obtient ainsi pour toutes ces fonctions-tests de degré inférieur ou égal à 3 les contraintes suivantes :

$$2 - 0 = y_{00}^\mu \quad [v(t, \underline{x}) = t] \quad (5.71)$$

$$\frac{1}{2} - 1 = y_{00}^{\omega^+} - y_{00}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = \underline{x}] \quad (5.72)$$

$$4 - 0 = 2y_{10}^\mu \quad [v(t, \underline{x}) = t^2] \quad (5.73)$$

$$1 - 0 = y_{01}^\mu + y_{10}^{\omega^+} - y_{10}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = t\underline{x}] \quad (5.74)$$

$$\frac{1}{4} - 1 = 2y_{01}^{\omega^+} - 2y_{01}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = \underline{x}^2] \quad (5.75)$$

$$8 - 0 = 3y_{20}^\mu \quad [v(t, \underline{x}) = t^3] \quad (5.76)$$

$$2 - 0 = 2y_{11}^\mu + y_{20}^{\omega^+} - y_{20}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = t^2 \underline{x}] \quad (5.77)$$

$$\frac{1}{2} - 0 = y_{02}^\mu + 2y_{11}^{\omega^+} - 2y_{11}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = t\underline{x}^2] \quad (5.78)$$

$$\frac{1}{8} - 1 = 3y_{02}^{\omega^+} - 3y_{02}^{\omega^-} \quad [v(t, \underline{x}) = \underline{x}^3]. \quad (5.79)$$

Enfin, les contraintes de représentativité pour chaque suite de moments tronquée associée aux mesures $\tau = \{\mu, \omega^+, \omega^-\}$ sont les suivantes. Les matrices de moments $M_1(y^\tau)$, dont les lignes et colonnes sont indexées par les multi-indices $\{00, 10, 01\}$, sont construites à partir de (2.9) pour donner les contraintes semi-définies suivantes :

$$\begin{bmatrix} y_{00}^\tau & y_{10}^\tau & y_{01}^\tau \\ y_{10}^\tau & y_{20}^\tau & y_{11}^\tau \\ y_{01}^\tau & y_{11}^\tau & y_{02}^\tau \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.80)$$

Les matrices de localisation $M_0(q_i^\tau * y^\tau)$ associées à chaque contrainte q_i définissant l'ensemble (5.66) sont de simples scalaires à la première relaxation. En utilisant (2.11), on obtient la contrainte de positivité que chacune engendre :

$$\begin{aligned} M_0((1 - \underline{x}^2) * y^\tau)[00, 00] &= \ell_{y^\tau}((1 - \underline{x}^2)t^0 \underline{x}^0) \\ &= y_{00}^\tau - y_{02}^\tau \geq 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

pour la contrainte $1 - \underline{x}^2 \geq 0$, et de manière analogue pour $t(2 - t) \geq 0$,

$$M_0(t(2 - t)y^\tau) = 2y_{10}^\tau - y_{02}^\tau \geq 0. \quad (5.82)$$

	Commande optimale (Problème 5.1)	PGM (Problème 5.8)	Relaxation 1 (Problème 5.15)
Variables de décision	$x(t), u(t)$	μ, ω^+, ω^-	$\{y_{ij}^\tau\} : i + j \leq 2$
Coût	(5.57)	(5.62)	(5.68)
Dynamique	(5.58)–(5.59)	(5.63)	(5.71)–(5.79)
Contraintes	(5.60), $t \in [0, 2]$	(5.65)–(5.66)	(5.81)–(5.82)
Représentativité	N.A.	(5.64)	(5.80)

TABLE 5.1 – Correspondance des éléments entre les problèmes 5.1, 5.8 et 5.15 pour l'exemple de §5.6.1

Le Tableau 5.1 reprend la correspondance entre les éléments de chaque problème.

En résolvant numériquement ce problème à la première relaxation, on obtient $J_M^1 = 0$, le coût optimal pour (5.57)–(5.60). De plus, en utilisant l'algorithme d'extraction présenté en §2.3.2 à la seconde relaxation, le contrôle optimal et trajectoire peuvent être extraits des matrices des moments :

$$\mu(dt, d\underline{x}) = \lambda_{[0,2]}(dt) \times \delta_0(d\underline{x}) \quad (5.83)$$

$$\omega(dt, d\underline{x}) = -\delta_0(dt) \times \lambda_{[0,1]}(d\underline{x}) + \delta_2(dt) \times \lambda_{[0, \frac{1}{2}]}(d\underline{x}). \quad (5.84)$$

Cette reconstruction totale du contrôle et de la trajectoire est bien évidemment due à la forme très particulière des trajectoires, ici constantes.

5.6.2 Contrôle d'attitude

Cet exemple montre que si la solution est purement impulsionnelle, l'algorithme d'extraction peut recouvrir les contrôles optimaux, même si cela n'est pas génériquement possible pour les trajectoires. Nous considérons le problème (adimensionnalisé) de contrôle d'attitude de satellite suivant :

$$J = \inf_u \int_0^5 \sum_{j=1}^3 |u_j(t)| dt$$

$$\text{t.q. } \dot{w}^a = -I^{-1}w^a \times (I \cdot w^a) + I^{-1}u,$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_1^a \\ w_2^a \\ w_3^a \end{bmatrix},$$

$$w^a(0) = w^a(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}',$$

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}',$$

$$q(5) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}',$$

$$\forall t : q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1, \quad (w_1^a)^2 + (w_2^a)^2 + (w_3^a)^2 \leq 1$$

où l'état est composé des 3 vitesses angulaires w^a et des 4 quaternions d'attitude q . Le contrôle est ici de dimension 3, en considérant 3 paires d'actionneurs alignées avec les directions principales du satellite. I est la matrice d'inertie, valant ici $\text{diag}([1 \ 2 \ 3])$. La manœuvre consiste à effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens antihorloger autour du troisième axe de rotation dans le repère attaché au satellite, tout en minimisant la consommation de carburant. Vu les symétries du problème, on s'attend à une rotation n'impliquant que la dernière paire de tuyères.

Effectivement, à la troisième relaxation, l'approche par les moments donne une borne inférieure sur le coût de 1.885. En utilisant la méthode d'extraction présentée en §2.3.2 sur la marginale de $\omega(dt, d\underline{x})$ par rapport au temps, on obtient la loi de commande suivante :

- $u_1(t) = 0$;
- $u_2(t) = 0$;
- $u_3(t)$ possède une impulsion d'amplitude +0.942 en $t = 0$, et de manière symétrique, une impulsion de -0.942 en $t = 5$.

Cette solution étant admissible après simulation, elle est donc (numériquement) globalement optimale.

5.6.3 Domaine non-convexe

L'exemple précédent illustre le cas de figure où la solution est purement impulsionnelle, ce qui permet de déduire facilement la stratégie de contrôle à partir des matrices des moments. Cet exemple montre que même dans le cas d'un contrôle mixte continu/impulsionnel, la méthode fournit suffisamment d'information pour retrouver ceux-ci, en plus de fournir les bornes usuelles sur le coût.

On considère ici l'oscillateur harmonique sur un domaine non-convexe :

$$\begin{aligned}
 J &= \inf_u \int_0^{2\pi} |u(t)| dt \\
 \text{t.q. } \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\
 x_1^2(t) + x_2^2(t) &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \varepsilon, \\
 x_1^2(t) + (x_2(t) + 1)^2 &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
 x(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}', \quad x(2\pi) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}'.
 \end{aligned}$$

La Table 5.2 reprend les bornes inférieures sur le coût en fonction des ordres de relaxations. A la dixième relaxation, on peut forcer l'algorithme d'extraction sur la marginale $M_{10}(y^\omega, t)$, pour obtenir la trajectoire purement impulsionnelle non-admissible présentée à la Figure 5.5. En s'inspirant de celle-ci, on en déduit la solution candidate suivante (voir Figure 5.6) :

- Une impulsion d'amplitude 0.156 en $t = 0$ et une autre de -0.120 en $t = 1.209$, pour rejoindre l'état $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}'$;

r	J_M^r
1	0.417
2	0.490
3	0.500
4	0.527
5	0.588
6	0.642
7	0.664
8	0.671
9	0.673
10	0.675

TABLE 5.2 – Bornes inférieures J_M^r en fonction de l'ordre de relaxation r pour l'exemple de §5.6.3

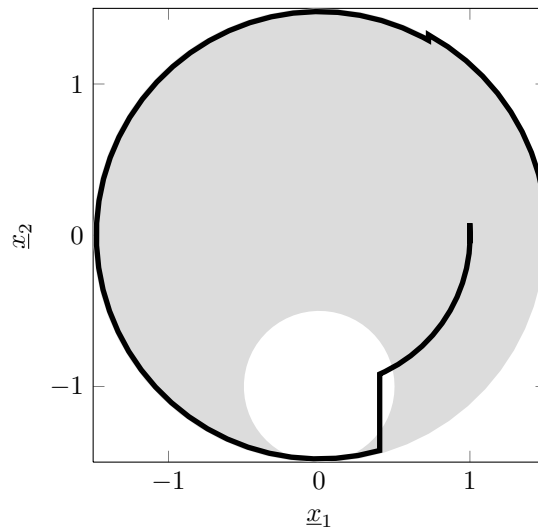


FIGURE 5.5 – Trajectoire obtenue à la dixième relaxation en forçant l'extraction de solution pour l'exemple de §5.6.3.

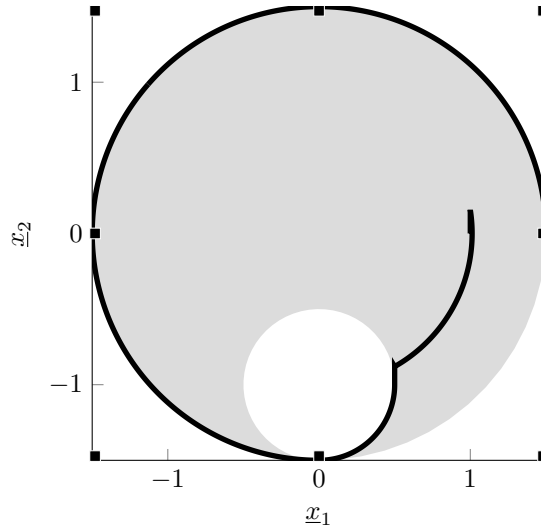


FIGURE 5.6 – Trajectoire candidate pour l'exemple de §5.6.3.

- Contourner l'obstacle dans le sens des aiguilles d'une montre en utilisant le contrôle bouclé $u = x_1 - \frac{x_1 x_2}{x_2 + 1}$. Le contrôle est bien dans L_1 mais pas dans L_2 .
- Une fois l'état $x = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}'$ rejoint, le contrôle reste nul jusqu'à la fin de la manœuvre.

Le coût simulé de cette solution candidate est de 0.682. En comparant avec les résultats de la Table 5.2, cette solution peut être certifiée à 1% de l'optimum global.

5.6.4 Champ de vecteurs non-commutatif

Nous adaptons de [BP07, Ex. 10.6] l'exemple prototype des systèmes nécessitant la complétion de graphe dans le sens de la Définition 5.7 pour obtenir une équation différentielle régie par les mesures bien posée. Nous rappelons que le crochet de Lie de deux vecteurs de fonctions dérivables $g_1(\underline{x})$ et $g_2(\underline{x})$ est donné par :

$$[g_1, g_2] := \frac{\partial g_2}{\partial \underline{x}} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} g_2. \quad (5.85)$$

Soit la dynamique

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

dont les colonnes g_1 et g_2 de G ne commutent pas au sens du crochet de Lie, puisque

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (5.87)$$

La trajectoire peut donc ne pas être définie uniquement pour un contrôle donné. On impose par exemple le contrôle purement impulsionnel $\nu_1 = \nu_2 = \delta_1(dt)$, et il est montré dans [BP07, Ex. 10.6] deux exemples de complétion de graphe menant à des trajectoires différentes, voir Figure 5.7. Le premier cas correspond intuitivement à appliquer « d'abord » le Dirac en ν_1 , « puis » celui en ν_2 , et le deuxième cas correspond à l'inverse. Les deux complétions sont fonctions du temps rapide $\vartheta \in [0, 2]$, et sont données, voir Figure 5.7, par respectivement

$$z(\vartheta) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vartheta & 0 \end{bmatrix}', & 0 \leq \vartheta \leq 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & \vartheta - 1 \end{bmatrix}', & 1 \leq \vartheta \leq 2 \end{cases} \quad (5.88)$$

et

$$z(\vartheta) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}', & 0 \leq \vartheta \leq 1 \\ \begin{bmatrix} \vartheta - 1 & 0 \end{bmatrix}', & 1 \leq \vartheta \leq 2. \end{cases} \quad (5.89)$$

Nous proposons maintenant de résoudre par l'approche sur les moments le problème de commande optimale suivant :

$$J = \inf_u \|x(2) - [1 \ 1]'\|^2 \text{ ou } \|x(2) - [1 \ 0]'\|^2$$

partant de $x(0) = [0 \ 0]'$, respectant la dynamique (5.86) et en imposant le contrôle impulsionnel $\nu_1 = \nu_2 = \delta_1(dt)$. Le premier coût est associé à la première complétion de graphe proposée, puisqu'elle atteint 0, la borne triviale sur le coût. Il en va de même pour le deuxième coût. Après quelques relaxations, on obtient effectivement que les moments des mesures ω_1 et ω_2 tendent, pour le premier cas, vers

$$\omega_1 = \delta_1(dt) \times \lambda_{[0,1]}(d\underline{x}_1) \times \delta_0(d\underline{x}_2) \quad (5.90)$$

$$\omega_2 = \delta_1(dt) \times \delta_1(d\underline{x}_1) \times \lambda_{[0,1]}(d\underline{x}_2) \quad (5.91)$$

et pour le deuxième cas vers

$$\omega_1 = \delta_1(dt) \times \delta_0(d\underline{x}_1) \times \delta_0(d\underline{x}_2) \quad (5.92)$$

$$\omega_2 = \delta_1(dt) \times \lambda_{[0,1]}(d\underline{x}_1) \times \delta_0(d\underline{x}_2) \quad (5.93)$$

Ceci est possible car l'approche par les moments permet d'optimiser sur les contrôles et les complétions de graphe.

Remarque 5.23 *Le fait qu'on puisse aller plus loin que les simples bornes inférieures sur le coût et reconstruire complètement les trajectoires et les complétions de graphe est bien sûr lié à la forme très simple de celles-ci. Ceci n'est pas vrai en général.*

5.7 Conclusion

Ce chapitre montre comment le formalisme des *mesures d'occupation* introduites au chapitre 3 et de l'emploi de *mesures-contrôles* comme au chapitre 4 permettent de traiter globalement les problèmes de commande optimale non-linéaires, affines en les contrôles avec ceux-ci non-bornés. En généralisant le concept de solutions de tels systèmes, on est

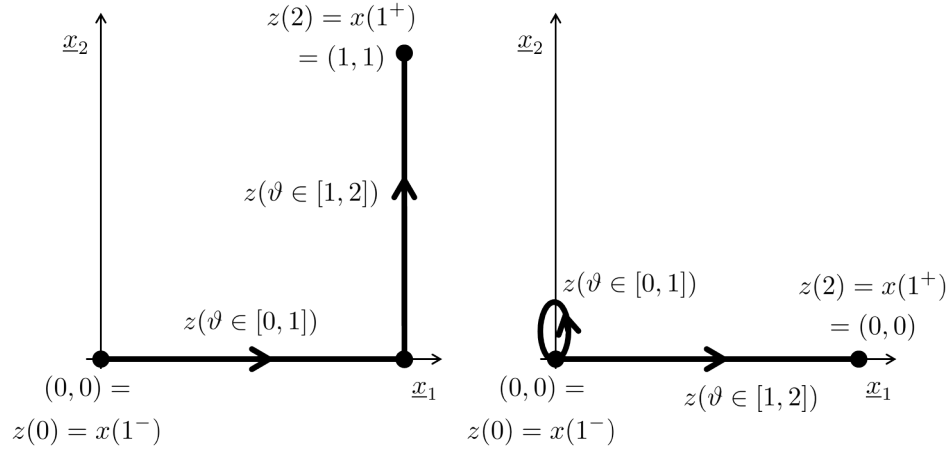


FIGURE 5.7 – Deux exemples de complétion de graphe pour l'exemple de §5.6.4.

amené naturellement à la définition d'une nouvelle mesure d'occupation, la *mesure d'occupation du contrôle*, qui permet d'optimiser sur les trajectoires comme sur les *complétions de graphe*. L'approche par les moments permet donc de traiter bon nombre de problèmes impulsionnels et hybrides dans leur pleine généralité.

Chapitre 6

Contrôles-mesures pour les systèmes à commutation

Sommaire

6.1	Introduction	95
6.2	PGM pour les systèmes à commutation	96
6.3	Réduction des variables mesurées	99
6.3.1	Systèmes polytopiques	99
6.3.2	Suppression des intégrateurs	100
6.4	Applications	100
6.4.1	Problème de contraste	101
6.4.2	Contrôle d'une voiture électrique	102
6.5	Conclusion	105

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons une sous-classe particulière des systèmes introduits au chapitre 3. Dans ces systèmes dits à *commutation*, la commande se réduit à choisir un mode de fonctionnement donné parmi plusieurs, et le cas échéant, commuter entre ces modes. Ce cas couvre un large panel d'applications pratiques, car il permet de traiter aussi les problèmes où le contrôle apparaît de manière bilinéaire. Comme aux chapitres 4 et 5, l'observation cruciale pour réduire considérablement la taille des relaxations semi-définies est de remarquer que le contrôle peut se modéliser par une mesure, même s'il est ici borné. Il en résulte donc un relâchement alternatif en tant que Problème Généralisé des moments (PGM) de ces problèmes de commande optimale, qui peut aussi s'appliquer à une sous-classe très courante des systèmes étudiés au troisième chapitre. Une des contributions de ce chapitre est de prouver rigoureusement le bien fondé de cette nouvelle relaxation. Une autre contribution est l'application de la méthode à deux exemples de commande optimale non-triviaux issus de la littérature.

Survol du chapitre

La section 6.2 introduit les systèmes à commutation, et prouve une nouvelle manière de les relâcher en tant que problème généralisé des moments. La section 6.3 introduit certaines techniques de réduction de variables pour les systèmes du chapitre 3. En particulier, §6.3.1 exploite directement les résultats de la section précédente pour une certaine classe de systèmes bilinéaires. La §6.3.2 applique quant à elle certains résultats du chapitre 4 pour supprimer les intégrateurs de l'espace d'état. Enfin, ces résultats sont appliqués en §6.4 à deux exemples non-triviaux de commande optimale. Les différentes approches exposées dans ce chapitre et au chapitre 3 sont comparées en détail.

6.2 PGM pour les systèmes à commutation

Dans cette section, nous explorons les systèmes dont la dynamique (éventuellement augmentée du coût Lagrangien) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^m f_j(t, x(t)) u_j(t) \quad (6.1)$$

tout en respectant les contraintes

$$u_j(t) \in \{0, 1\}, \quad \sum_{j=1}^m u_j(t) = 1 \quad \lambda(dt)\text{-p.p.} \quad (6.2)$$

Ces systèmes se rencontrent tels quels dans de nombreuses applications, en électronique notamment. On interprète chacun des f_j comme un « mode » spécifiant le fonctionnement du système dans une configuration donnée, et le contrôle consiste simplement à choisir quel mode est actif en un temps donné.

L'intérêt de spécialiser l'approche par les moments pour de tels systèmes réside dans le fait que les contrôles u_j rentrent linéairement dans la dynamique. Il est dès lors possible de considérer ceux-ci comme des mesures du temps, comme aux chapitres 4 et 5, au lieu d'une variable mesurée par une mesure d'occupation, comme au chapitre 3. Cette substitution engendre une forme alternative au Problème 3.16 généralisé des moments décrit en page 38, avec un plus grand nombre de mesures définies sur des espaces de dimension plus faible. Au vu des résultats de §2.4.1, la résolution pratique de ce nouveau PGM engendre des relaxations semi-définies nettement plus favorables d'un point de vue calculatoire, à ordre de relaxation donné. La complexité de la méthode à ordre de relaxation donnée ne varie plus qu'en fonction du temps et de la dimension de l'espace d'état, de manière analogue à Hamilton-Jacobi-Bellman.

Remarque 6.1 *Si la dynamique possède un terme de dérive, c'est-à-dire :*

$$\dot{x} = f_0(t, x(t)) + \sum_{j=1}^m f_j(t, x(t)) u_j(t), \quad (6.3)$$

on revient à (6.1) grâce au fait que $\sum_{j=1}^m u_j(t) = 1$:

$$\dot{x} = f_0 + \sum_{j=1}^m f_j u_j(t) = \sum_{j=1}^m (f_0 + f_j) u_j(t). \quad (6.4)$$

On considère donc un problème de commande optimale sous la forme du :

Problème 6.2 (Contrôle optimal des systèmes à commutation)

$$\begin{aligned}
 J &= \inf_{a,b,u(\cdot),x(\cdot)} \int_a^b h_j(t, x(t)) u_j(t) dt + h_a(a, x(a)) + h_b(b, x(b)) \\
 \text{t.q.} \quad &\dot{x} = \sum_{j=1}^m f_j(t, x(t)) u_j(t) \quad \lambda_{[a,b]}-\text{p.p.}, \\
 &(a, x(a)) \in \mathbf{K}_a, \\
 &(b, x(b)) \in \mathbf{K}_b, \\
 &(t, x(t)) \in \mathbf{K}, \\
 &u(t) \in \mathbf{U} := \left\{ \underline{u} \in \{0, 1\}^m : \sum_{j=1}^m \underline{u}_j = 1 \right\}, \\
 &a \leq b.
 \end{aligned}$$

Ce problème se relâche sur les mesures, sous la forme du Problème 3.8 donnée à la page 36, par :

$$\begin{aligned}
 J_M &= \inf_{\mu, \mu_a, \mu_b} \left\langle \sum_{j=1}^m h_j \underline{u}_j, \mu \right\rangle + \langle h_a, \mu_a \rangle + \langle h_b, \mu_b \rangle \\
 \text{t.q.} \quad &\langle v, \mu_b \rangle - \langle v, \mu_a \rangle = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j \underline{u}_j, \mu \right\rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}], \\
 &\langle 1, \mu_a \rangle = \langle 1, \mu_b \rangle = 1, \\
 &\mu_a \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \mu_a \subset \mathbf{K}_a, \\
 &\mu_b \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \mu_b \subset \mathbf{K}_b, \\
 &\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \quad \text{supp } \mu \subset \mathbf{K} \times \mathbf{U}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Comme expliqué au chapitre 3, c'est bien une relaxation qui est effectuée, dans le sens où la contrainte $u_j(t) \in \{0, 1\}$ est intrinsèquement relâchée en $u_j(t) \in [0, 1]$. Il peut donc y avoir un saut de relaxation, c'est-à-dire $J_M < J$.

Nous étudions maintenant le bien-fondé de relâcher le Problème 6.2 de commande optimale des systèmes à commutation par le :

Problème 6.3 (PGM pour les systèmes à commutation)

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_M &= \inf_{\tilde{\mu}_j, \mu_a, \mu_b} \sum_{j=1}^m \langle h_j, \tilde{\mu}_j \rangle + \langle h_a, \mu_a \rangle + \langle h_b, \mu_b \rangle \\
 \text{t.q.} \quad &\langle v, \mu_b \rangle - \langle v, \mu_a \rangle = \sum_{j=1}^m \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j, \tilde{\mu}_j \right\rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, \mu_a \rangle &= \langle 1, \mu_b \rangle = 1, \\
\mu_a &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \mu_a \subset \mathbf{K}_a, \\
\mu_b &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \mu_b \subset \mathbf{K}_b, \\
\tilde{\mu}_j &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \tilde{\mu}_j \subset \mathbf{K}.
\end{aligned}$$

Proposition 6.4 *Une solution (μ, μ_a, μ_b) admissible pour (6.5) peut s'écrire en une solution admissible $(\tilde{\mu}_j, \mu_a, \mu_b)$ pour le Problème 6.3 avec le même coût, et vice versa, soit :*

$$J_M = \tilde{J}_M. \quad (6.6)$$

Preuve

$J_M \geq \tilde{J}_M$: Puisque $\sum_{j=1}^m \underline{u}_j = 1$, et en définissant

$$\tilde{\mu}_j(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) := \int_{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{U}} \underline{u}_j d\mu \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad (6.7)$$

on obtient

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j \underline{u}_j, \mu \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j \right) \underline{u}_j, \mu \right\rangle \quad (6.8)$$

$$= \sum_{j=1}^m \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j, \tilde{\mu}_j \right\rangle. \quad (6.9)$$

Comme le coût est traité de manière similaire, le résultat s'ensuit.

$J_M \leq \tilde{J}_M$: On se base la preuve de von Neumann du théorème de Radon-Nikodym [RF10, Chap. 18.4]. En effet, en définissant

$$\tilde{\mu} := \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j \quad (6.10)$$

chaque mesure $\tilde{\mu}_j$ est absolument continue par rapport à $\tilde{\mu}$, de sorte qu'il existe pour chacune d'elle une fonction mesurable $g_j \in F(\mathbf{K})$, avec $g_j(t, \underline{x}) \geq 0$, telle que

$$\tilde{\mu}_j = g_j \tilde{\mu}. \quad (6.11)$$

Ceci entraîne

$$\tilde{\mu} = \sum_{j=1}^m g_j \tilde{\mu}, \quad (6.12)$$

qui implique $\sum g_j = 1$, $\lambda_{\mathbf{K}}$ -presque partout. On définit alors

$$\mu(d(t, \underline{x}, \underline{u})) := \left(\prod_{j=1}^m \delta_{g_j}(d\underline{u}_j | t, \underline{x}) \right) \times \tilde{\mu}(d(t, \underline{x})) \quad (6.13)$$

pour que, par définition :

$$\langle \underline{u}_j, \mu \rangle = \langle g_j, \tilde{\mu} \rangle. \quad (6.14)$$

On obtient alors la relation souhaitée :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j, \tilde{\mu}_j \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j \right) g_j, \tilde{\mu} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j, g_j, \tilde{\mu} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} f_j, \underline{u}_j, \mu \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Le coût se traite de façon analogue. ■

6.3 Réduction des variables mesurées

Cette section rassemble plusieurs techniques qui permettent d'améliorer l'efficacité algorithmique de l'approche par les moments en réduisant le nombre de variables mesurées, dont un corollaire direct des résultats de la section précédente.

6.3.1 Systèmes polytopiques

Nous considérons les systèmes où les contrôles rentrent de manière bilinéaire dans la dynamique et prennent leurs valeurs dans un polytope, c'est-à-dire caractérisés par la dynamique (6.1) avec comme contrainte :

$$u(t) \in \text{conv} \{U_1, U_2, \dots, U_m\}. \quad (6.16)$$

En associant à chaque U_j un contrôle $w_j(t) \in \{0, 1\}$ tel que $\sum_{j=1}^m w_j(t) = 1$ presque partout, (6.1)–(6.16) se réécrit :

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^m f_j(t, x(t)) U_j w_j(t) := \sum_{j=1}^m \tilde{f}_j w_j(t) \quad (6.17)$$

qui a exactement la forme présentée en §6.2. Il faut noter qu'on a réellement restreint le problème, puisque un contrôle $u(t)$ à l'intérieur de l'enveloppe convexe ne peut être qu'approché faiblement par des contrôles $\sum_{j=1}^m U_j w_j(t)$. Comme on va par la suite résoudre (6.1)–(6.2) en relâchant le problème de contrôle optimal comme un PGM, on recouvre néanmoins le problème original.

6.3.2 Suppression des intégrateurs

Nous exploitons ici certains résultats du chapitre 4. Soit un problème de contrôle optimal sous la forme

$$\begin{aligned}
 J &= \inf \int_a^b h(t, x(t), u(t)) dt + h_a(a, x(a)) + h_b(b, x(b)) \\
 \text{t.q.} \quad &\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\
 &\dot{\xi} = g(t, x(t), u(t)), \\
 &(a, x(a)) \in \mathbf{K}_a, \\
 &(b, x(b)) \in \mathbf{K}_b, \\
 &(t, x(t), u(t)) \in \mathbf{K}, \\
 &\xi(a), \xi(b) \text{ donnés.}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Le problème de commande optimale est sous la forme présentée au chapitre 3, avec une dynamique augmentée des intégrateurs ξ qui n'apparaissent dans la définition du problème uniquement au travers de contraintes aux bords. Ce cas particulier se retrouve souvent dans les applications en mécanique, où les intégrateurs modélisent la position d'un véhicule par exemple.

Par les résultats de §4.2.1, on a bien évidemment que la contrainte imposée sur les intégrateurs se réécrit

$$\xi(b) - \xi(a) = \int_a^b g(t, x(t), u(t)) dt, \tag{6.19}$$

de sorte que, en suivant le raisonnement du chapitre 3, l'on obtient le relâchement de (6.18) en un PGM sous la forme :

$$\begin{aligned}
 J_M &= \inf_{\mu, \mu_a, \mu_b} \langle h, \mu \rangle + \langle h_a, \mu_a \rangle + \langle h_b, \mu_b \rangle \\
 \text{t.q.} \quad &\langle v, \mu_b \rangle - \langle v, \mu_a \rangle = \langle \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \cdot f, \mu \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}[t, \underline{x}], \\
 &\langle 1, \mu_a \rangle = \langle 1, \mu_b \rangle = 1, \\
 &\mu_a \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_a), \\
 &\mu_b \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}_b), \\
 &\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbf{K}), \\
 &\xi(b) - \xi(a) = \langle g, \mu \rangle.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Ainsi, au lieu de poser les mesures d'occupation sur un espace mesurant les états x et ξ , les mesures portent donc sur x uniquement et les contraintes intégrales deviennent de simples contraintes de moments supplémentaires.

Remarque 6.5 *Le cas présenté ci-dessus s'étend trivialement aux chaînes d'intégrateurs, puisque les matrices F et F^{-1} , voir (4.7) en §4.2.1, ont alors leurs coefficients dans $\mathbb{R}[t]$.*

6.4 Applications

Dans cette section, nous présentons deux problèmes non-triviaux de commande optimale, et explorons comment les méthodes développées dans ce chapitre peuvent aider à résoudre ceux-ci de manière plus efficace que les méthodes développées au chapitre 3. L'intérêt pratique des méthodes présentées dans ce mémoire est le calcul de bornes inférieures sur le

coût, ce qui permet de venir compléter les approches plus traditionnelles qui n'offrent bien souvent que des garanties locales d'optimalité. En ce sens, le premier problème présente une approche très prometteuse de résolution pratique en combinant plusieurs méthodes numériques afin de mitiger les faiblesses de chacune :

1. Utiliser une méthode directe ou indirecte pour obtenir une trajectoire candidate localement optimale ;
2. Comparer son coût par rapport aux bornes inférieures données par les relaxations semi-définies ;
3. Si le résultat n'est pas satisfaisant, recommencer l'étape 1 avec une autre initialisation et/ou résoudre l'étape 2 pour un ordre de relaxation plus élevé ;
4. Une fois une solution numérique certifiée proche de l'optimalité globale, il est possible de comparer sa structure par rapport à celles pouvant être déduites à partir du principe du maximum de Pontryagin, afin d'obtenir la solution optimale sous forme analytique. On peut aussi utiliser une méthode indirecte pour continuer la solution par homotopie pour des problèmes voisins.

6.4.1 Problème de contraste

Nous reprenons l'exemple de commande de champ magnétique en imagerie médicale traité en [BCCM13]. Le problème s'écrit

$$\begin{aligned}
 J &= \inf -x_3^2(T) - x_4^2(T) \\
 \text{t.q. } \dot{x}_1 &= -\Gamma_1 x_1 - x_2 u \\
 \dot{x}_2 &= \gamma_1(1 - x_2) + x_1 u \\
 \dot{x}_3 &= -\Gamma_2 x_3 - x_4 u \\
 \dot{x}_4 &= \gamma_2(1 - x_4) + x_3 u, \\
 x(0) &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]', \\
 x_1(T) &= x_2(T) = 0, \\
 x_1^2 + x_2^2 &\leq 1, \quad x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \\
 -2\pi &\leq u \leq 2\pi, \\
 T &\text{ donné}
 \end{aligned}$$

où Γ_i et γ_i sont des paramètres physiques donnés. Ce problème est une normalisation du contrôle de deux spins quantiques (le premier décrit par les états x_1 et x_2 , le deuxième par x_3 et x_4), chacun associé à une substance différente, par un champ magnétique $u(t)$. La physique du système est décrite plus en détail dans [LZB⁺10]. Avant l'application du champ magnétique, les deux spins sont dans le même état d'équilibre $[0 \ 1]'$, et le but est d'en amener un à l'origine en un temps donné, tout en éloignant l'autre le plus possible de celle-ci. Ceci permet d'obtenir, à la fin de la manœuvre, deux états quantiques suffisamment éloignés pour que les deux substances puissent être différenciées par des techniques d'imagerie. Nous prendrons ici le cas du fluide cérébrospinal ($\Gamma_1 = 0.155$,

r	Contrôle mesuré (Problème 3.8 p.36)			Contrôle-mesure (Problème 6.3 p.97)		
	$\sqrt{-J_M^r}$	N_r	t_r	$\sqrt{-J_M^r}$	N_r	t_r
1	1.000	49	1	0.9827	63	0.6
2	0.8984	336	2	0.8756	378	1.0
3	0.8707	1386	9	0.8599	1386	6.6
4	0.8256	4290	265	0.7973	3861	113
5	0.7881	11011	5147	0.7891	9009	1298
6	0.7867	24752	50027	0.7871	18564	10831

TABLE 6.1 – Borne supérieure sur le contraste $\sqrt{-J_M^r}$, nombre de moments N_r et temps de calcul t_r en fonction du type de relaxation et de son ordre r pour le problème de contraste.

$\gamma_1 = 0.0155$) et de l'eau ($\Gamma_2 = 0.0124$, $\gamma_2 = 0.0124$), à contrôler pour différentes valeurs du temps final $T \in [T_{\min}, 2T_{\min}]$, avec le temps minimal pour amener le premier spin du pôle nord à l'origine $T_{\min} = 20.2$.

D'un point de vue qualitatif, ce problème de contrôle est difficile à résoudre [BCCM13]. En effet, le système peut présenter des arcs singuliers, et il reste à trouver la bonne combinatoire entre les arcs bangs et singuliers, ce qui est loin d'être trivial. Cette complexité est présente malgré le fait que les contraintes d'états puissent être ici ignorées, l'espace d'état admissible étant invariant par la dynamique. Il en résulte que plusieurs optima locaux existent en fonction des structures de commutations possibles.

En revenant à l'approche par les moments, on remarque que le problème est polytopique tel que défini en §6.3.1, ce qui permet d'optimiser aussi bien le PGM défini au Problème 3.8 page 36 que celui défini par le Problème 6.3 page 97. La Table 6.1 reprend les résultats à ordre de relaxation donné, la première étant d'ordre 1 puisque que coût, dynamique et contraintes sont quadratiques. On remarque directement l'avantage d'utiliser la formulation du Problème 6.3 : à ordre de relaxation r donné, les bornes supérieures sur le contraste entre les substances (données par $\sqrt{-J_M^r}$) sont plus fines, tout en étant calculées en un temps t_r plus rapide. Finalement, il semble que les deux suites de bornes supérieures sur le contraste convergent vers une valeur d'environ 0.787. Cette valeur doit être confirmée par d'autres méthodes.

En appliquant une méthode directe (implémentée avec BOCOP [BMG12]) et en continuant par homotopie les meilleures solutions (en utilisant HAMPATH [Cot12]), il est alors possible de construire [BCCM13] sur tout l'intervalle $T \in [T_{\min}, 2T_{\min}]$ un ensemble de solutions localement optimales, dont les contrastes forment des bornes inférieures sur le contraste globalement optimal. Cette courbe est reportée à la Figure 6.1, où les bornes supérieures données par l'approche par les moments (ici, la formulation du Problème 3.8 est utilisée) à différents ordres de relaxation sont également présentées. On peut donc certifier globalement les résultats obtenus par BOCOP et HAMPATH à moins d'un pourcent du coût.

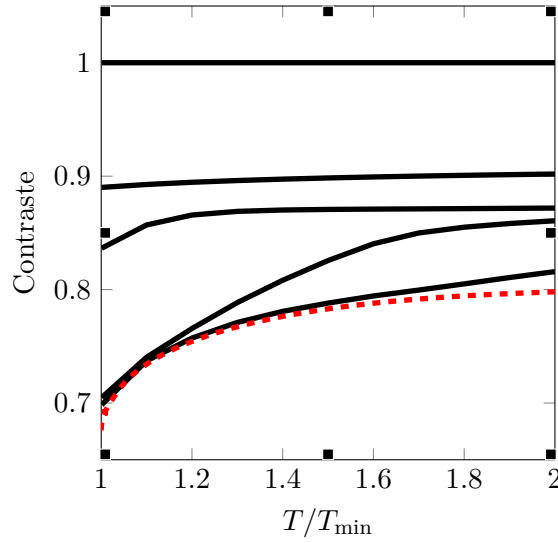


FIGURE 6.1 – Bornes inférieure (tirets) et supérieures (noir, relaxations 1 à 5) sur le contraste, et écart relatif. Figure tirée de [BCCM13].

6.4.2 Contrôle d'une voiture électrique

On considère ici le problème d'accélérer une voiture électrique sur une distance donnée en minimisant sa consommation d'énergie électrique, tel que présenté en [MMA13]. Le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 J &= \inf_{u(t)} \int_0^{10} (V_{alim} x_1 u + R_{bat} x_1^2 u^2) dt \\
 \text{t.q. } \dot{x}_1 &= -\frac{R_m}{L_m} x_1 - \frac{K_m}{L_m} x_2 + \frac{V_{alim}}{L_m} u, \\
 \dot{x}_2 &= \frac{K_m}{J} x_1 - \frac{r M g K_f}{J K_r} - \frac{r^3 \rho S C_x}{2 J K_r^3} x_2^2, \\
 \dot{x}_3 &= \frac{r}{K_r} x_2, \\
 |x_1(t)| &\leq 150, \\
 u(t) &\in \{-1, +1\}, \\
 x(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \\
 x_3(10) &= 100.
 \end{aligned}$$

Le premier état est le courant $[A]$ alimentant le moteur, le deuxième la vitesse angulaire $[rad/s]$ du moteur et le troisième la position $[m]$. Le contrôle est un simple transistor en position fermée ($u = -1$) ou ouverte ($u = 1$) commandant un convertisseur relié à la batterie. Une contrainte sur le courant maintient celui-ci à un niveau acceptable.

Les paramètres du modèle pour cet exemple particulier sont

- le rapport de réduction mécanique $K_r = 10$;
- la densité de l'air $\rho = 1.293 [kg/m^3]$;

- le coefficient aérodynamique $C_x = 0.4$;
- la surface frontale $S = 2 [m^2]$;
- la rayon de la roue $r = 0.33 [m]$;
- le coefficient de friction statique $K_f = 0.03$;
- la constante de couple du moteur $K_m = 0.27$;
- la résistance inductive $R_m = 0.03 [\Omega]$;
- l'inductance du rotor $L_m = 0.05 [H]$;
- la masse du véhicule $M = 250 [kg]$;
- l'accélération gravitationnelle $g = 9.81 [m/s^2]$;
- l'inertie du système vu par le moteur $J = M \times r^2 / K_r^2$;
- la tension d'alimentation fournie par la batterie $V_{alim} = 150 [V]$;
- la résistance série de la batterie $R_{bat} = 0.05 [\Omega]$.

Dans [MMA13], il est proposé de s'appuyer sur le caractère discret du contrôle afin d'obtenir un problème voisin formulé par programmation mixte entière/continue. Ce problème est alors résolu par une méthode de séparation/évaluation¹. L'algorithme retourne un coût $\tilde{J} = 22648 [J]$, et la simulation du contrôle obtenu donne une trajectoire admissible avec un coût de $22766 [J]^2$. Nous proposons maintenant de valider l'optimalité globale de cette solution candidate.

On remarque que vu la contrainte $u \in \{-1, 1\}$, l'expression du coût se simplifie puisque $u^2 = 1$. On a alors à nouveau un système polytopique de la forme (6.1) –(6.16), avec donc deux possibilités de relaxations en un PGM. On remarque également que dans les deux cas, il faut rajouter deux contraintes artificielles sur la vitesse angulaire x_2 et la position x_3 pour imposer des mesures à support compact. Vu la physique du système, $x_2^2 \leq 1000^2$ et $0 \leq x_3 \leq 100$ ont été choisies. Enfin, on remarque que le troisième état est un simple intégrateur, qu'il n'apparaît pas dans la dynamique des autres états et qu'il est simplement contraint aux deux bouts. On peut donc utiliser les techniques décrites en §6.3.2 pour diminuer la taille de l'espace d'état.

La Figure 6.2 reprend les bornes sur le coût en fonction des trois types de relaxation et de l'ordre de relaxation, ainsi que la charge de calcul. On remarque que les deux premières relaxations donnent essentiellement les mêmes bornes, et que l'avantage de relâcher par le Problème 6.3 au lieu du Problème 3.8 ne semble pas significatif d'un point de vue calculatoire par rapport à ce qui est observé pour le problème de contraste. Ceci est dû à la faible dimension de l'espace d'état, et pour les ordres de relaxation modestes qui ont été choisis, l'avantage n'est pas directement apparent. Pour des plus hauts ordres de relaxation, les différences de temps de calcul deviennent significatives. Les résultats pour ceux-ci

¹Anglais : « branch and bound ».

²Ces résultats ont été obtenus par correspondance avec Frédéric Messine.

r	Contrôle mesuré (Problème 3.8 p.36)			Contrôle-mesure (Problème 6.3 p.97)			Contrôle-mesure et suppression des intégrateurs (Problème 6.3 + §6.3.2)		
	J_M^r	N_r	t_r	J_M^r	N_r	t_r	J_M^r	N_r	t_r
1	-21375	36	0.7	-21375	45	0.9	-21375	30	0.7
2	21589	196	1	21768	210	0.9	21072	105	0.9
3	22749	672	2	22753	630	1.8	22682	252	1.3
4	22763	1782	8	22763	1485	6.7	22757	495	2.2
5	22764	4004	55	22764	9009	35	22761	858	3.6
6	22765	8008	246	22766	18564	231	22764	1365	10

TABLE 6.2 – Borne inférieure sur l'énergie consommée J_M^r , nombre de moments N_r et temps de calcul t_r en fonction du type de relaxation et du degré de relaxation r pour le problème de la voiture électrique.

ne sont pas présentés, puisque certains problèmes numériques peuvent éventuellement apparaître, voir la discussion en §2.4.

En utilisant les deux techniques de réduction de l'état présentées en §6.3, on obtient une chute spectaculaire du temps de calcul. Les bornes sont néanmoins légèrement moins bonnes. Enfin, d'un point de vue pratique, on remarque que les bornes inférieures données sont très proches du coût de la solution candidate, ce qui permet de valider son optimalité globale.

6.5 Conclusion

Ce chapitre développe et prouve une nouvelle formulation en tant que problème généralisé des moments pour les systèmes à commutation. Ce résultat s'étend trivialement aux systèmes à champ de vecteurs polytopiques, de sorte qu'une large classe de problème est couverte en pratique. Par rapport aux techniques développées au chapitre 3, faisant appel aux *contrôles mesurés*, la formulation utilise les *mesures-contrôles*, qui sont posées sur des espaces euclidiens de plus faible dimension. Comme présenté dans deux exemples non-triviaux de commande optimale, les gains calculatoires sont significatifs.

Chapitre 7

Perspectives

L'objectif principal de cette thèse est l'application aux problèmes de commande optimale des méthodes issues de l'approche par les moments, décrite au chapitre 2. Dans cette méthode, on essaye de reformuler un problème d'optimisation quelconque comme un Problème Généralisé des Moments (PGM), soit un problème d'optimisation linéaire dont les variables de décision sont des mesures. Une méthode numérique basée sur des relaxations semi-définies existe alors pour résoudre numériquement ce problème. L'intérêt principal de cette méthode numérique est la qualité *globale* de la solution renvoyée, et les certificats qu'elle renvoie permettent de compléter avantageusement d'autres méthodes numériques existantes.

Une des contributions de cette thèse est d'étendre le formalisme existant des mesures d'occupation, l'outil central permettant d'appliquer la méthode des moments aux problèmes où les contrôles sont bornés, voir le chapitre 3. Dans ce formalisme, les mesures sont posées sur l'espace de contrôle – on parle de *contrôle mesuré* – ce qui empêche son application aux problèmes où le contrôle est non borné. Dans ce dernier cas on modélise alors le contrôle lui-même par une mesure, appelée *mesures-contrôles*.

Cette idée simple est appliquée au chapitre 4 aux problèmes linéaires en norme L^1 minimale. Ces problèmes, très étudiés dans les années 1960, se formulent naturellement comme un PGM, mais l'absence de méthodes numériques pour traiter celui-ci efficacement a relégué cette approche sur un plan purement théorique. Nous montrons que ces problèmes peuvent être résolus numériquement par notre approche de manière simple et efficace. Un grand avantage de procéder de la sorte est l'absence de discrétisation temporelle du problème, qui est remplacée par un schéma d'approximation polynomiale. Celui-ci peut être rigoureusement contrôlé par des méthodes numériques simples d'emploi, issues de la théorie de l'approximation.

Les mesures-contrôles sont ensuite considérées au chapitre 5 pour les systèmes non-linéaires. En appliquant certains résultats de la littérature sur le contrôle dit impulsif, nous proposons pour la première fois de poser ces problèmes de commande comme des problèmes généralisés des moments, et d'y appliquer ensuite l'approche numérique exposée au chapitre 2. Il en découle une méthode très flexible permettant de prendre facilement en compte des contraintes de types très différents.

Enfin, les mesures-contrôles permettent aussi de traiter une sous-classe des systèmes non-linéaires généraux considérés au chapitre 3 : les systèmes à commutation. Cette nou-

velle formulation est nettement plus avantageuse d'un point de vue calculatoire, car les mesures sont ici posées sur un espace euclidien de plus petite dimension. Les gains de calculs sont illustrés sur deux exemples de problèmes non-triviaux de commande optimale. La méthode permet alors de valider l'optimalité globale de solutions candidates fournies par d'autres méthodes numériques.

En revenant au cahier des charges de l'introduction concernant une méthode numérique idéale hypothétique, nous discutons maintenant les forces et les faiblesses de la méthode :

Faible expertise Le bagage théorique pour la compréhension mathématique de la méthode est relativement lourd pour un ingénieur. Néanmoins, son application est aisée grâce à la boîte à outil GloptiPoly [HLL09]. Il suffit de trouver la bonne formulation en tant que PGM pour son type de problème ¹, et le tout est implémentable en une cinquantaine de lignes de code. Aucune initialisation particulière n'est requise, et seule la définition du problème doit être spécifiée.

Optimalité globale La méthode est conçue pour résoudre les problèmes globalement, et permet d'identifier les problèmes infaisables. Ce résultat est évidemment à modérer : le problème de minimisation ($\min_x \dots$) est bien résolu globalement, mais il est difficile de déduire des données du problème les contrôles et les trajectoires optimales ($\operatorname{argmin}_x \dots$). Le problème de reconstruction des contrôles n'est réellement résolu que pour les systèmes linéaires considérés au chapitre 4.

Complexité numérique Ceci reste la principale faiblesse de la méthode, qui la cantonne pour l'instant aux applications hors-lignes, vu les temps de calcul en jeu. Néanmoins, les méthodes développées dans cette thèse permettent de traiter plus efficacement une large classe de problèmes en pratique, ceux où le contrôle rentre (bi)linéairement, voir §6.3.1.

Discrétisation rigoureuse La méthode fait totalement abstraction de discrétisations spatiales ou temporelles du problème de commande. La troncature en un problème fini se fait rigoureusement, par les résultats d'analyse fonctionnelle évoqués au chapitre 2, sous la forme de relaxations dont les propriétés sont bien définies. En particulier, l'utilisateur de la méthode n'a pas de paramètres délicats à régler, ou de maillage à définir, pour l'application de la méthode. Pour les problèmes traités au chapitre 4, une approximation est nécessaire, mais l'erreur introduite par celle-ci, facilement quantifiable par des méthodes numériques dédiées, et peut être rigoureusement incorporée dans le problème d'optimisation.

Comportements discontinus C'est une des contributions de la thèse que de permettre maintenant l'application de la méthode aux problèmes à contrôles non bornés, aussi appelés problèmes impulsionnels ou hybrides, comme présenté au chapitre 5. Les systèmes à commutation peuvent aussi être traités facilement, comme présenté au chapitre 6.

¹Pour un problème à contrôle borné général, on choisira le Problème 3.8 p.36. Pour un système à commutation ou polytopique, on choisira le Problème 6.3 p.97. Pour un système à contrôle non borné, on choisira le Problème 5.15 p.80. Pour les problèmes linéaires à norme minimale, on choisira le Problème 4.7 p.58.

Contraintes La méthode traite naturellement les contraintes (sur le contrôle, sur l'état, mixtes, intégrales, ...). Dans un certain sens, les contraintes sont même nécessaires au bon fonctionnement de la méthode puisque elles permettent de garantir l'hypothèse essentielle de compacité des ensembles sur lequel les mesures sont posées.

Perspectives

Nous clôturons ce mémoire sur plusieurs perspectives de recherche en continuité de ces travaux.

7.0.1 Extension à d'autres problèmes du calcul des variations

Les chapitres 4 et 5 se consacrent aux problèmes où le contrôle est non-borné mais rentre de manière affine dans la description du problème (dynamique ou coût). Il serait intéressant d'étendre la méthode aux problèmes où le contrôle non-borné rentre de manière polynomiale. L'exemple prototype est le suivant [Dac07, Ex. 4.6] :

Exemple 7.1 (Weierstrass)

$$J = \inf_{u(t)} \int_{-1}^1 t^2 u^2 dt$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ x(-1) &= -1, \\ x(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on peut construire une suite minimisante de contrôles $u_n(t)$ telle que $\int_{-1}^1 t^2 u_n^2 dt \rightarrow 0$, une borne inférieure évidente au problème. On montre aussi que $u_n(t)$ tend faiblement vers $2\delta_0(dt)$, mais $\int_{-1}^1 u_n^2(t) dt \rightarrow \infty$.

Ce problème ne peut être résolu tel quel par les méthodes exposées dans cette thèse. La méthode du chapitre 3 pour les contrôles mesurés n'est pas applicable puisque l'espace de contrôle n'est pas borné ; L'implémentation d'une telle méthode mène pour cet exemple vers des problèmes numériques. On ne peut pas non plus utiliser les méthodes des chapitres 4 et 5 pour les contrôles non-bornés, puisque ceux-ci ne rentrent pas de manière affine dans la définition du problème.

On peut néanmoins tenter de résoudre ce problème, de manière très heuristique, en le formulant comme au chapitre 3, tout en tronquant la suite de moments de ses éléments où le degré associé au contrôle est strictement supérieur à 2. De manière équivalente, on peut faire les substitutions formelles

$$u(t) dt \rightarrow \nu(dt) \tag{7.1}$$

$$u^2(t) dt \rightarrow \eta(dt), \tag{7.2}$$

avec $\nu(dt)$ et $\eta(dt)$ deux mesures-contrôles à traiter comme au chapitre 5, et contraintes par leurs moments grâce à

$$\begin{bmatrix} M(y^\mu) & M(y^\nu) \\ M(y^\nu) & M(y^\eta) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{7.3}$$

On remarque numériquement que ν tend bien vers le Dirac escompté, et la matrice $M(y^n)$ tend vers celle d'un objet qu'on pourrait assimiler au « carré du Dirac ». En effet, on observe que $M_r(y^n) \approx n_r M_r(y^\nu)$, avec n_r une constante non-bornée grandissant à chaque relaxation.

Tout ce traitement doit être formalisé, et, de manière certainement liée, une manière de compactifier ce problème doit être développée pour éviter la fuite des moments vers l'infini.

Il serait aussi intéressant de formaliser cette méthode pour les systèmes où les contrôles sont bornés, pour obtenir une formulation proche de celle pour les systèmes à commutation. Ceci permettrait de traiter plus efficacement les systèmes où le contrôle prend ses valeurs dans un ellipsoïde par exemple.

7.0.2 Extraction des solutions

D'un point de vue pratique, l'extraction des trajectoires optimales à partir des moments de leur mesure d'occupation μ est certainement le développement le plus nécessaire. Ce problème est connu sous le nom de *problème inverse des moments*, et peu de publications traitent de ce problème pour les mesures d'occupations, le cas de fonctions simples comme les indicatrices de polytopes étant déjà difficile à traiter. On peut néanmoins citer [HLM12] comme une des tentatives les plus abouties, où pour les moments indexés par $y_{ij} := \langle t^i x^j, \mu \rangle$, une méthode est développée par retrouver la trajectoire, si elle est unique, à partir des moments de la forme $y_{i1}, i \in \mathbb{N}$. Malheureusement, vu le faible nombre de tels moments pour les relaxations atteignables en pratique, l'approximation ne permet pas de donner suffisamment d'information pour retrouver les trajectoires. Idéalement, une méthode inverse pour les mesures d'occupation devrait faire usage de tous les moments croisés.

7.0.3 Exploitation de la structure du problème

La méthode par les moments est généralement cantonnée aux applications sur les espaces de faible dimension, mettons 6. Néanmoins, dans le cas de l'optimisation polynomiale, l'exploitation d'une certaine structure de parcimonie permet d'appliquer la méthode pour des problèmes jusqu'à une centaine de variables [BHL11]. Pour le cas des problèmes d'optimisation continue, l'exploitation de la structure d'un problème est plus délicate, à cause des contraintes dynamiques faibles à respecter pour chaque fonction-test polynomiale. Ce mémoire propose toutefois deux contributions pour exploiter certaines structures. Premièrement, les systèmes où les contrôles rentrent de manière (bi)linéaire, comme au chapitre 6, peuvent donc être modélisés par des contrôles-mesures, ce qui est nettement plus favorable d'un point de vue calculatoire. Le deuxième cas, plus modeste, est celui du remplacement des intégrateurs par des contraintes intégrales en §6.3.2, ce qui est particulièrement adaptée pour l'approche par les moments. Une généralisation de ces méthodes serait certainement la bienvenue.

Bibliographie

- [AFP00] L. AMBROSIO, N. FUSCO et D. PALLARA : *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press on Demand, 2000.
- [AKZLD11] D. ARZELIER, M. KARA-ZAITRI, C. LOUEMBET et A. DELIBAŞI : Using polynomial optimization to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(5):1567–1572, 2011.
- [AN87] E. ANDERSON et P. NASH : *Linear programming in infinite-dimensional spaces : theory and applications*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 1987.
- [Bar02] A. BARVINOK : *A Course in Convexity*. Graduate Studies in Mathematics, V. 54. American Mathematical Society, 2002.
- [BBV10] P. BETTIOL, A. BRESSAN et R. VINTER : On trajectories satisfying a state constraint : W11 estimates and counterexamples. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(7):4664–4679, 2010.
- [BCCM13] B. BONNARD, M. CLAEYS, O. COTS et P. MARTINON : Comparison of numerical methods in the contrast imaging problem in NMR. *In 2013 Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013. Accepted for publication.
- [BDGD11] J. C. BERGES, S. DJALAL, P. Y. GUIDOTTI et M. DELPECH : CNES formation flying experiment on PRISMA : spacecraft reconfiguration and rendezvous within FFIORD mission. *In International ESA Conference on Guidance and Navigation Control Systems*, Karlovy Vary, Czech Republi, June 2011.
- [BHL11] F. BUGARIN, D. HENRION et J.-B. LASSERRE : Minimizing the sum of many rational functions. *ArXiv e-prints*, février 2011.
- [BMG12] J. BONNANS, Frédéric, P. MARTINON et V. GRÉLARD : Bocop - A collection of examples. Research Report RR-8053, INRIA, 2012.
- [BP07] A. BRESSAN et B. PICCOLI : *Introduction to the mathematical theory of control*. AIMS Series on Applied Mathematics. Springfield, M.O. American institute of mathematical sciences, 2007.

- [BR88] A. BRESSAN et F. RAMPAZZO : On differential systems with vector-valued impulsive controls. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, 2(3):641–656, 1988.
- [BS79] D. P. BERTSEKAS et S. E. SHREVE : *Stochastic optimal control : the discrete time case*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1979.
- [But69] A. G. BUTKOVSKII : *Distributed control systems*. American Elsevier Pub. Co New York, 1969.
- [BV04] S. BOYD et L. VANDENBERGHE : *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [CAHL12] M. CLAEYS, D. ARZELIER, D. HENRION et J.-B. LASSERRE : Measures and LMIs for optimal impulsive control with application to space rendezvous problems. *In Proceedings of the 2012 American Control Conference*, Montreal, Canada, June 2012.
- [CAHL13a] M. CLAEYS, D. ARZELIER, D. HENRION et J.-B. LASSERRE : Measures and LMIs for non-linear optimal impulsive control. Submitted, 2013.
- [CAHL13b] M. CLAEYS, D. ARZELIER, D. HENRION et J.-B. LASSERRE : Moment LMI approach to LTV impulsive control. *In 2013 Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013. Accepted for publication.
- [Cot12] O. COTS : *Contrôle optimal géométrique : méthodes homotopiques et applications*. Thèse de l’Université de Bourgogne, 2012.
- [Dac07] B. DACOROGNA : *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Applied Mathematical Sciences, v. 78. Springer Science+Business Media, LLC, 2007.
- [Des96] G. DESAULNIERS : On shortest paths for a car-like robot maneuvering around obstacles. *Robotics and Autonomous Systems*, 17(3):139 – 148, 1996.
- [DS10] V. DYKHTA et O. SAMSONYUK : Hamilton-Jacobi inequalities in control problems for impulsive dynamical systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 271(1):86–102, 2010.
- [dt13] T. M. development TEAM : The Mosek optimization software, 2013.
- [FR75] W. FLEMING et R. RISHEL : *Deterministic and stochastic optimal control*. Applications of Mathematics. Springer-Verlag, 1975.
- [FR00] H. FRANKOWSKA et F. RAMPAZZO : Filippov’s and Filippov–Ważewski’s theorems on closed domains. *Journal of Differential Equations*, 161(2):449 – 478, 2000.
- [FT13] H. FRANKOWSKA et D. TONON : Inward pointing trajectories, normality of the maximum principle and the non occurrence of the Lavrentieff phenomenon in optimal control under state constraints. *Journal of Convex Analysis*, 2013.

- [Gam78] R. GAMKRELIDZE : *Principles of optimal control theory*. Plenum Press, New York, 1978.
- [GQ09] V. GAITSGORY et M. QUINCAMPOIX : Linear programming approach to deterministic infinite horizon optimal control problems with discounting. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(4):2480–2512, 2009.
- [HDC13] D. HENRION, J. DAAFOUZ et M. CLAEYS : Optimal switching control design for polynomial systems : an LMI approach. In *2013 Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013. Accepted for publication.
- [Hen12] D. HENRION : Semidefinite characterisation of invariant measures for one-dimensional discrete dynamical systems. *Kybernetika*, 48(6):1089–1099, 2012.
- [HGSB12] D. HENRION, M. GANET-SCHOELLER et S. BENNANI : Measures and lmi for space launcher robust control validation. In *7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, June 2012.
- [Hir76] M. HIRSCH : *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1976.
- [HLL09] D. HENRION, J.-B. LASSERRE et J. LÖFBERG : Gloptipoly 3 : Moments, optimization and semidefinite programming. *Optim. Methods and Software*, 24(4-5):761–779, 2009.
- [HLM12] D. HENRION, J.-B. B. LASSERRE et M. MEVISSSEN : Mean squared error minimization for inverse moment problems. *ArXiv e-prints*, août 2012.
- [HLS09] D. HENRION, J. B. LASSERRE et C. SAVORGNAN : Approximate volume and integration for basic semialgebraic sets. *SIAM Rev.*, 51(4):722–743, novembre 2009.
- [Kol70] A. N. KOLMOGOROV : *Introductory real analysis*. Dover Publications, New York, 1970.
- [KS98] T. KURTZ et R. STOCKBRIDGE : Existence of Markov controls and characterization of optimal Markov controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(2):609–653, 1998.
- [LADBP11] C. LOUEMBET, D. ARZELIER, G. DEACONU et P. BLANC-PAQUES : Robust rendezvous planning under navigation and manoeuvring errors. In *International ESA Conference on Guidance and Navigation Control Systems*, Karlov Vary, Czech Republi, June 2011.
- [Las00] J. B. LASSERRE : Optimisation globale et théorie des moments. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 331(11):929 – 934, 2000.
- [Las08] J. B. LASSERRE : A semidefinite programming approach to the generalized problem of moments. *Mathematical Programming*, 112(1):65–92, 2008.

- [Las09] J.-B. LASSERRE : *Positive polynomials and their applications*. Imperial College Press, London, 2009.
- [LHPT08] J. B. LASSERRE, D. HENRION, C. PRIEUR et E. TRÉLAT : Nonlinear optimal control via occupation measures and LMI-relaxations. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4):1643–1666, juin 2008.
- [Lue97] D. G. LUENBERGER : *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st édition, 1997.
- [LV80] R. LEWIS et R. VINTER : Relaxation of optimal control problems to equivalent convex programs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 74(2): 475–493, 1980.
- [LZB⁺10] M. LAPERT, Y. ZHANG, M. BRAUN, S. J. GLASER et D. SUGNY : Singular extremals for the time-optimal control of dissipative spin $\frac{1}{2}$ particles. *Phys. Rev. Lett.*, 104:083001, Feb 2010.
- [ML08] J. B. MUELLER et R. LARSSON : Collision avoidance manoeuvre planning with robust optimization. In *International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, Tralee, County Kerry, Ireland, June 2008.
- [MMA13] A. MERAKEB, F. MESSINE et M. AIDÈNE : A branch and bound algorithm for minimizing the energy consumption of an electrical vehicle. 2013.
- [Neu64] L. W. NEUSTADT : Optimization, a moment problem and nonlinear programming. *SIAM J. Control*, 2(1):33–3, 1964.
- [Nie13] J. NIE : Optimality conditions and finite convergence of Lasserre’s hierarchy. *Mathematical Programming, Ser. A*, juin 2013.
- [Put93] M. PUTINAR : Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3):969–984, 1993.
- [RF10] H. ROYDEN et P. FITZPATRICK : *Real analysis*. Prentice Hall, 2010.
- [Rou06] T. ROUBÍČEK : Numerical techniques in relaxed optimization problems. In A. KURDILA, P. PARDALOS et M. ZABARANKIN, éditeurs : *Robust Optimization-Directed Design*, volume 81 de *Nonconvex Optimization and Its Applications*, pages 157–178. Springer US, 2006.
- [Rub75] J. E. RUBIO : Generalized curves and extremal points. *Siam Journal on Control*, 13:28–47, 1975.
- [Rub76] J. RUBIO : Extremal points and optimal control theory. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 109(1):165–176, 1976.
- [Sch65] W. SCHMAEDEKE : Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures. *SIAM J. Control*, 3:231–280, 1965.

- [Stu99] J. F. STURM : Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999.
- [TET12] Y. TASSA, T. EREZ et E. TODOROV : Synthesis and stabilization of complex behaviors through online trajectory optimization. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4906–4913, 2012.
- [TH65] J. TSCHAUNER et P. HEMPEL : Rendezvous zu einem in elliptischer bahn umlaufenden ziel. *Astronautica Acta*, 2:104–109, 1965.
- [Tré05] E. TRÉLAT : *Contrôle optimal. Théorie et applications*. Vuibert, Paris, 2005.
- [Tre13] L. TREFETHEN : *Approximation Theory and Approximation Practice*. Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [TT11] L. N. TREFETHEN et T. C. D. TEAM : Chebfun version 4.2, 2011.
- [Vin93] R. VINTER : Convex duality and nonlinear optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):518–538, 1993.
- [VL78] R. VINTER et R. LEWIS : The equivalence of strong and weak formulations for certain problems in optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16(4):546–570, 1978.
- [You69] L. YOUNG : *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1969.